

پاسخ تمرین های منتخب فصل ۳:

۲- اثبات رابطه زیر به وسیله استقرا:

در الگوریتم ۳-۱ برای محاسبه $\binom{n}{k}$ به تعداد $2\binom{n}{k} - 1$ عبارت محاسبه می شود.

فرض استقرا: $1 = \binom{1}{0} = 2\binom{1}{0} - 1 = 2(1) - 1$, $1 = \binom{1}{1} = 2\binom{1}{1} - 1 = 2(1) - 1$

پایه استقرا: برای محاسبه $\binom{n}{k}$ به تعداد $2\binom{n}{k} - 1$ عبارت باید محاسبه می شود.

مکمل استقرا: برای محاسبه $\binom{n+1}{k}$ به تعداد $2\binom{n+1}{k} - 1$ عبارت باید محاسبه می شود.

اثبات: با استفاده از استقرای قوی این مسئله را حل می کنیم یعنی همانطور که نوشته ایم، فرض می کنیم که پایه استقرا برای k های بین صفر تا n برقرار است و با استفاده از آن مکمل استقرا را اثبات می کنیم. با استفاده از تساوی ۱-۳ می دانیم که:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

همچنین می دانیم که برای محاسبه $\binom{n}{k-1}$ به تعداد $2\binom{n}{k-1} - 1$ عبارت باید محاسبه شود و برای محاسبه $\binom{n}{k}$

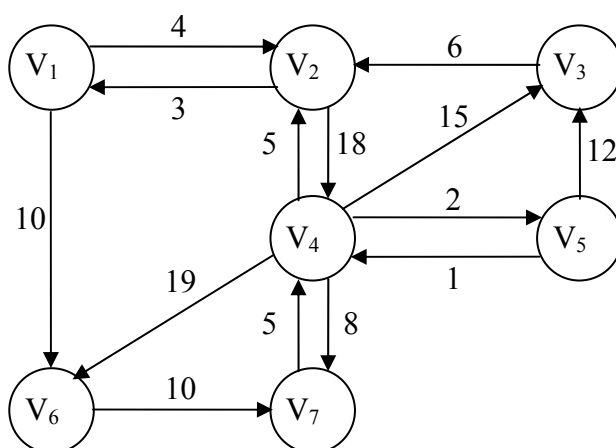
باید $2\binom{n}{k} - 1$ عبارت محاسبه شود، پس برای محاسبه $\binom{n+1}{k}$ باید به تعداد $2\binom{n}{k-1} - 1 + 2\binom{n}{k} - 1 + 1$ عبارت

محاسبه شود چرا که فراخوانی $\binom{n+1}{k}$ نیز یک مرتبه شمارش می شود، بنابراین داریم:

$$2\binom{n}{k-1} - 1 + 2\binom{n}{k} - 1 + 1 = 2\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] - 1 = 2\left[\binom{n+1}{k}\right] - 1 = 2\binom{n+1}{k} - 1$$

پس مکمل استقرا ثابت شد.

۴- در گراف زیر کوتاه ترین مسیر از v_7 به v_3 را با استفاده از الگوریتم فلوید، مرحله به مرحله نشان دهید:



در اشکال زیر، تمام قطر ها فاکستری کم رنگ شده اند چرا که در هیچ مرحله ای تغییر نمی کنند. سطر و ستون k ام در مرحله $k-1$ ام نیز فاکستری پر رنگ شده است چرا که در مرحله k ام تغییر نمی کند. همچنین در مرحله $k-1$ ام هر فانه ای در سطر $k-1$ ام که بینهایت باشد، ستون مربوطه اش زرد رنگ شده است چرا که این ستون در مرحله k ام بدون تغییر می ماند و همچنین هر فانه ای در ستون $k-1$ که بینهایت باشد، سطر مربوطه اش زرد رنگ شده است چرا که این

سطر در مرحله k ام بدون تغییر می ماند. همچنین چنانچه خانه ای در مرحله k ام تغییر کرده باشد، با رنگ سبز نشان داده شده است:

$$W = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 4 & \infty & \infty & \infty & 10 & \infty \\ 3 & 0 & \infty & 18 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 6 & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 5 & 15 & 0 & 2 & 19 & 5 \\ \infty & \infty & 12 & 1 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & 8 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$D^{(0)} = W = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 4 & \infty & \infty & \infty & 10 & \infty \\ 3 & 0 & \infty & 18 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 6 & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 5 & 15 & 0 & 2 & 19 & 5 \\ \infty & \infty & 12 & 1 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & 8 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$D^{(1)} = (k=1) \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 4 & \infty & \infty & \infty & 10 & \infty \\ 3 & 0 & \infty & 18 & \infty & 13 & \infty \\ \infty & 6 & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 5 & 15 & 0 & 2 & 19 & 5 \\ \infty & \infty & 12 & 1 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & 8 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$D^{(2)} = (k=2) \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 4 & \infty & 22 & \infty & 10 & \infty \\ 3 & 0 & \infty & 18 & \infty & 13 & \infty \\ 9 & 6 & 0 & 24 & \infty & 19 & \infty \\ 8 & 5 & 15 & 0 & 2 & 18 & 5 \\ \infty & \infty & 12 & 1 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & 8 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$D^{(3)} = (k=3)$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	4	∞	22	∞	10	∞
2	3	0	∞	18	∞	13	∞
3	9	6	0	24	∞	19	∞
4	8	5	15	0	2	18	5
5	21	18	12	1	0	31	∞
6	∞	∞	∞	∞	∞	0	10
7	∞	∞	∞	8	∞	∞	0

$P =$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	2	0	0	0
2	0	0	0	0	0	1	0
3	2	0	0	2	0	2	0
4	2	0	0	0	0	2	0
5	3	3	0	0	0	3	0
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0

$D^{(4)} = (k=4)$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	4	37	22	24	10	27
2	3	0	33	18	20	13	23
3	9	6	0	24	26	19	29
4	8	5	15	0	2	18	5
5	9	6	12	1	0	19	6
6	∞	∞	∞	∞	∞	0	10
7	16	13	23	8	10	26	0

$P =$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	4	2	4	0	4
2	0	0	4	0	4	1	4
3	2	0	0	2	4	2	4
4	2	0	0	0	0	2	0
5	4	4	0	0	0	4	4
6	0	0	0	0	0	0	0
7	4	4	4	0	4	4	0

$D^{(5)} = (k=5)$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	4	36	22	24	10	27
2	3	0	32	18	20	13	23
3	9	6	0	24	26	19	29
4	8	5	14	0	2	18	5
5	9	6	12	1	0	19	6
6	∞	∞	∞	∞	∞	0	10
7	16	13	22	8	10	26	0

$P =$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	5	2	4	0	4
2	0	0	5	0	4	1	4
3	2	0	0	2	4	2	4
4	2	0	5	0	0	2	0
5	4	4	0	0	0	4	4
6	0	0	0	0	0	0	0
7	4	4	5	0	4	4	0

$D^{(6)} = (k=6)$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	4	36	22	24	10	20
2	3	0	32	18	20	13	23
3	9	6	0	24	26	19	29
4	8	5	14	0	2	18	5
5	9	6	12	1	0	19	6
6	∞	∞	∞	∞	∞	0	10
7	16	13	22	8	10	26	0

$P =$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	5	2	4	0	6
2	0	0	5	0	4	1	4
3	2	0	0	2	4	2	4
4	2	0	5	0	0	2	0
5	4	4	0	0	0	4	4
6	0	0	0	0	0	0	0
7	4	4	5	0	4	4	0

$$D^{(7)} = D = (k=7)$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	4	36	22	24	10	20
2	3	0	32	18	20	13	23
3	9	6	0	24	26	19	29
4	8	5	14	0	2	18	5
5	9	6	12	1	0	19	6
6	26	23	32	18	20	0	10
7	16	13	22	8	10	26	0

$$P =$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	5	2	4	0	6
2	0	0	5	0	4	1	4
3	2	0	0	2	4	2	4
4	2	0	5	0	0	2	0
5	4	4	0	0	0	4	4
6	7	7	7	7	7	0	0
7	4	4	5	0	4	4	0

بنابراین کوتاه ترین مسیر از v_7 به v_3 ، به صورت زیر می باشد:

$$V_7 \text{Path}(7,3) V_3 \Rightarrow V_7 \underbrace{\text{Path}(7, P[7][3])}_{\text{Path}(7,5)} V_{P[7][3]} \underbrace{\text{Path}(P[7][3], 3)}_{\text{Path}(5,3)=\text{NULL}} V_3$$

$$\Rightarrow V_7 \underbrace{\text{Path}(7, P[7][5])}_{\text{Path}(7,4)=\text{NULL}} V_{P[7][5]} \underbrace{\text{Path}(P[7][5], 5)}_{\text{Path}(4,5)=\text{NULL}} V_5 V_3 \Rightarrow V_7 V_4 V_5 V_3$$

منظور از NULL در عبارات بالا یعنی اینکه تابع هیچ عملی انجام نمی دهد چرا که در ماتریس P خانه مربوط به آن سطر و ستون، صفر می باشد.

۷- این الگوریتم برای چاپ مسیر بین دو رأس در الگوریتم فلوید می باشد. می دانیم که این تابع با توجه به ماتریس P عمل می کند. چنانچه گرافی را به الگوریتم فلوید بدهیم که متی در بدترین حالت که در یک مسیر کوتاه از یک رأس مانند v_i به (رأسی دیگر مانند v_j ، تمام رئوس دیگر (به جز این دو رأس) وجود داشته باشند، در ماتریس P تمام خانه ها مخالف صفر نمی باشند، چرا که اگر این طور بود، مداخل بین دو رأس از رئوس این مسیر، مسیری کوتاه تر وجود خواهد داشت بنابراین تابع Path حداکثر به تعداد تمام رئوس به جز همان دو رأس اول و آخر مسیر، رأس بر روی صفحه چاپ می کند و در یک جایی P مربوط به مسیر دو رأس صفر می شود و این تابع متوقف می شود. به عبارت دیگر بهتر است بگوییم چنانچه تابع Path یک مرتبه فراخوانی شود، در بدترین حالت به تعداد دو مرتبه خود را فراخوانی می کند یعنی مسیر بین i و j دارای یک رأس واسطه مانند k می باشد، اما در مرحله بعد نیز بین رأس i و k حداکثر یک رأس واسطه می تواند وجود داشته باشد و همچنین بین رأس k و j بنابراین نهایتاً در بدترین حالت هم به جایی می رسیم که رأس واسطه ای بین دو رأس وجود ندارد و تابع Path دیگر فراخوانی نمی شود بنابراین در بدترین حالت تابع Path به تعداد رئوس گراف و چند مرتبه اضافه تر به دلیل بررسی این موضوع که رأس واسطه ای بین دو رأس وجود دارد یا خیر، فراخوانی می شود و حداکثر می توان گفت به تعداد دو برابر تعداد رئوس فراخوانی می شود که البته چنین حالتی هیچ گاه بوجهود نمی آید ولی می توان به جرأت گفت که از این بدتر نمی شود. بنابراین تابع Path بر مسب تعداد رئوس (n) دارای پیچیدگی $O(n)$ می باشد.

۱۵- تساوی روبرو را اثبات کنید: $\sum_{diagonal=1}^{n-1} [(n - diagonal) \times diagonal] = \frac{n(n-1)(n+1)}{6}$ اثبات:

$$\sum_{diagonal=1}^{n-1} [(n - diagonal) \times diagonal] = \sum_{diagonal=1}^{n-1} [ndiagonal - diagonal^2] =$$

$$n \sum_{diagonal=1}^{n-1} diagonal - \sum_{diagonal=1}^{n-1} diagonal^2 = n \times \frac{(n-1) \times n}{2} - \frac{(n-1)(n)(2(n-1)+1)}{6}$$

$$= \frac{3n^2(n-1)}{6} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{n(n-1)(3n - (2n-1))}{6} = \frac{n(n-1)(3n-2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n(n-1)(n+1)}{6}$$

پاسخ تمرین های منتخب فصل ۴:

۱- می خواهیم نشان دهیم که روش مریصانه برای سکه های $D^0, D^1, D^2, \dots, D^i$ که $D > 0$ و $i > 0$ همواره یک مل بهینه می دهد. ابتدا بیایید بررسی کنیم که مثلاً برای مقدار M چگونه باید پول برداریم. ابتدا به تعداد $M \text{ Div } D^i$ سکه از نوع D^i بر می داریم. مال به مقدار $M_1 = M \text{ Mod } D^i$ پول نیاز داریم. سپس به مقدار $M_1 \text{ Div } D^{i-1}$ سکه از نوع D^{i-1} نیاز داریم که چنانچه این مقدار را بر داریم، به مقدار $M_2 = M_1 \text{ Mod } D^{i-1}$ پول نیاز داریم و به همین ترتیب ادامه می دهیم و در نهایت چنانچه به مقدار پولی رسیدیم که دیگر سکه ای از آن نوع نداریم، از سکه نوع $D^0 = 1$ (یعنی همان سکه ۱ ریالی) بر می داریم. چنانچه در یکی از مراحل ماصل تقسیم صفر شد، بدیهی است که از آن نوع سکه به هیچ تعدادی بر نمی داریم. فوب مال باید اثبات کنیم که این تعداد، مینیمم است. فرض کنید که از سکه نوع D^i به تعداد N_i سکه برداریم بنابراین داریم:

$$M = N_0 D^0 + N_1 D^1 + \dots + N_i D^i$$

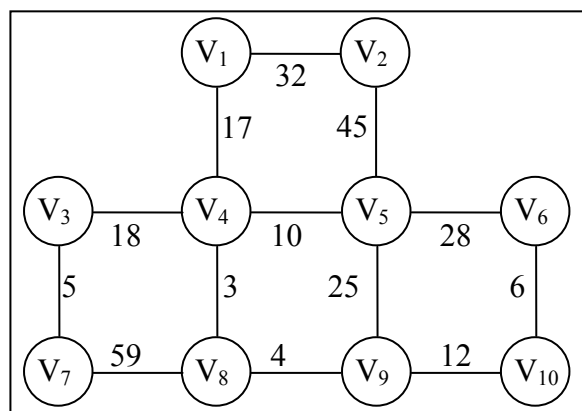
که در رابطه بالا باید مقدار $N_0 + N_1 + \dots + N_i$ مینیمم باشد. با توجه به روش مریصانه می دانیم که N_j به ازای $0 \leq j < i$ در محدوده $0 \leq N_j \leq D - 1$ می باشد بنابراین رابطه بالا به صورت زیر در می آید:

$$N_0 + N_1 + \dots + N_i \Rightarrow 0 \leq N_0 + N_1 + \dots + N_{i-1} \leq (i-1)(D-1)$$

در این رابطه N_i را دفالست نمی دهیم چرا که برای آن محدودیتی نداریم و ممکن است حتی به تعداد خیلی بیشتر از D سکه از آن داشته باشیم یعنی $N_i > D$ که این مشکلی برای ما به وجود نمی آورد و اگر چنین نبود ممکن بود الگوریتم مریصانه با شکست مواجه شود. نکته دیگر که باید به آن توجه داشته باشیم این است که ممکن است به ذهن مان این فکر فطور کند که شاید به ازای یک l و m و n مشخصی، به جای l سکه از نوع D^1 و m سکه از نوع D^m و n سکه از نوع D^n می توانستیم به تعداد k سکه از نوع D^k برداریم و این موضوع الگوریتم مریصانه را با مشکل مواجه سازد. در جواب باید گفت که چنانچه به این حالت برسید پیداست که الگوریتم را به صورت صحیح به کار نبرده اید و گرنه باید همان موقع که سکه هایی از نوع D^k انتخاب می کردیم، به تعداد $N_k + k$ سکه بر می داشتیم. مال می خواهیم اثبات کنیم که رابطه بالا همواره مینیمم است.

اثبات فلف: فرض کنید که رابطه فوق مینیمم نباشد بنابراین به ازای یک n و m مشخصی می توانستیم به تعداد k از سکه نوع دیگری برداریم که در مورد این موضوع صمبت کردیم و به این نتیجه می رسیم که در چنین صورتی الگوریتم را اشتباه اجرا کرده ایم بنابراین چنین حالتی رف نمی دهد بنابراین الگوریتم مریصانه در این مسئله به درستی عمل می کند.

۲- ردیابی الگوریتم پریم برای گراف زیر: می دانیم در ابتدا $F = \emptyset$



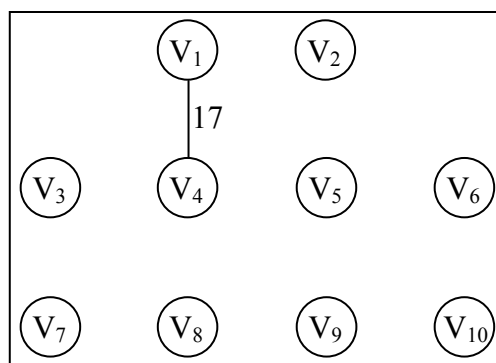
$$W = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 32 & \infty & 17 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 32 & 0 & \infty & \infty & 45 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 18 & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty \\ 17 & \infty & 18 & 0 & 10 & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \infty & 45 & \infty & 10 & 0 & 28 & \infty & \infty & 25 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 28 & 0 & \infty & \infty & \infty & 6 \\ \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty & 0 & 59 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 59 & 0 & 4 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 25 & \infty & \infty & 4 & 0 & 12 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & \infty & 12 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10
nearest	1	1	1	1	1	1	1	1	1
distance	32	∞	17	∞	∞	∞	∞	∞	∞

min=17

vnear=4

F={ (4, 1) }

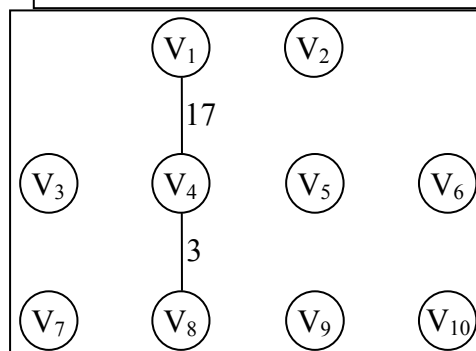


i	2	3	5	6	7	8	9	10
nearest	1	4	4	1	1	4	1	1
distance	32	18	10	∞	∞	3	∞	∞

min=3

vnear=8

F=F ∪ { (8, 4) }

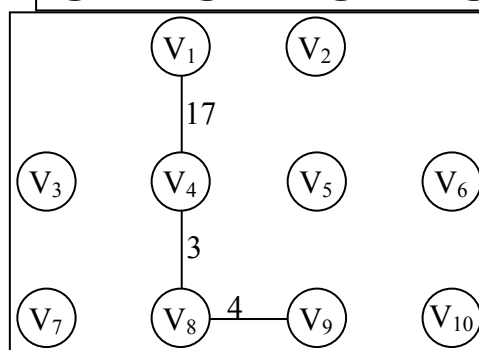


i	2	3	5	6	7	9	10
nearest	1	4	4	1	8	8	1
distance	32	18	10	∞	59	4	∞

min=4

vnear=9

F=F ∪ { (9, 8) }

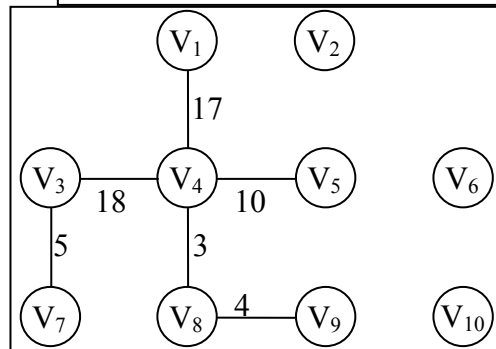


i	2	3	5	6	7	10
nearest	1	4	4	1	8	9
distance	32	18	10	∞	59	12

min=10

vnear=5

F=F ∪ { (5, 4) }

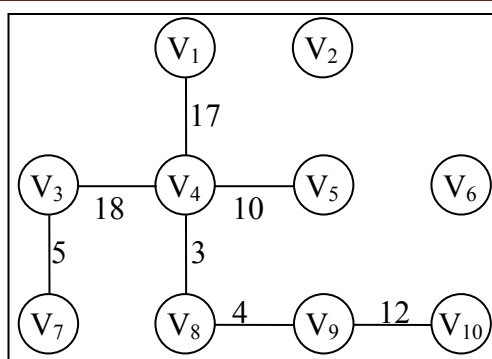


i	2	3	6	7	10
nearest	1	4	5	8	9
distance	32	18	28	59	12

min=12

vnear=10

F=FU{ (10, 9) }

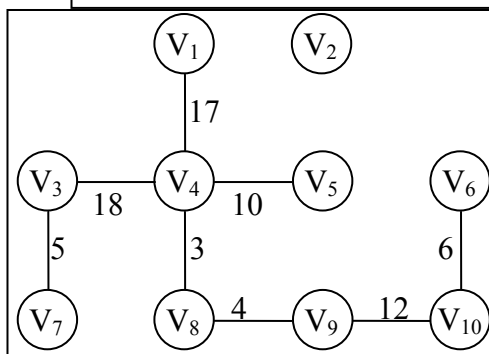


i	2	3	6	7
nearest	1	4	10	8
distance	32	18	6	59

min=6

vnear=6

F=FU{ (6, 10) }

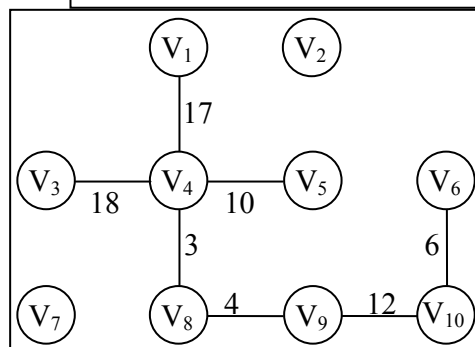


i	2	3	7
nearest	1	4	8
distance	32	18	59

min=18

vnear=3

F=FU{ (3, 4) }

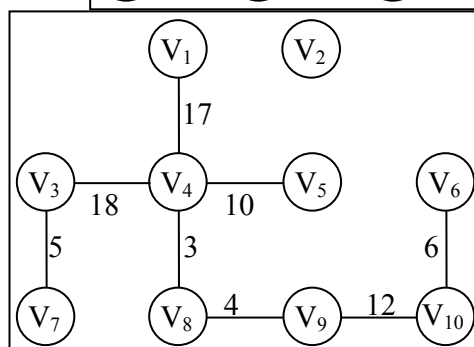


i	2	7
nearest	1	3
distance	32	5

min=5

vnear=7

F=FU{ (7, 3) }

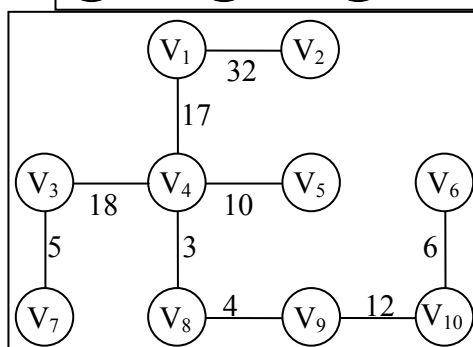


i	2
nearest	1
distance	32

min=32

vnear=2

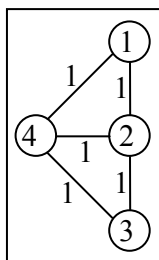
F=FU{ (2, 1) }



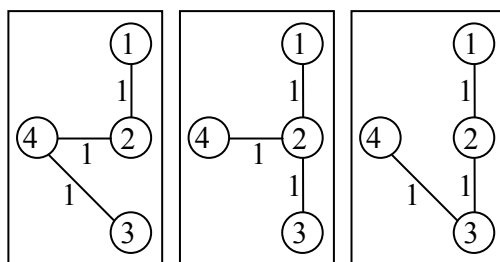
بنابراین داریم:

F={ (4, 1) , (8, 4) , (9, 8) , (5, 4) , (10, 9) , (6, 10) , (3, 4) , (7, 3) , (2, 1) }

۳- برای گراف زیر چندین درخت پوشا وجود دارد:



نمونه هایی از درخت های پوشا گراف فوق:



۴- ردیابی الگوریتم کروسکال برای تمرین شماره ۲:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$$E = \{ \underbrace{(4,8)}_3, \underbrace{(8,9)}_4, \underbrace{(3,7)}_5, \underbrace{(6,10)}_6, \underbrace{(4,5)}_{10}, \underbrace{(9,10)}_{12}, \underbrace{(1,4)}_{17}, \underbrace{(3,4)}_{18}, \underbrace{(5,9)}_{25}, \underbrace{(5,6)}_{28}, \underbrace{(1,2)}_{32}, \underbrace{(2,5)}_{45}, \underbrace{(7,8)}_{59} \}$$

$$F = \emptyset$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	4	9	10

$$e = (4, 8) \quad i = 4 \quad j = 8 \quad p = 4 \quad q = 8 \quad F = F \cup \{ (4, 8) \}$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	4	4	10

$$e = (8, 9) \quad i = 8 \quad j = 9 \quad p = 4 \quad q = 9 \quad F = F \cup \{ (8, 9) \}$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	3	4	4	10

$$e = (3, 7) \quad i = 3 \quad j = 7 \quad p = 3 \quad q = 7 \quad F = F \cup \{ (3, 7) \}$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	3	4	4	6

$$e = (6, 10) \quad i = 6 \quad j = 10 \quad p = 6 \quad q = 10 \quad F = F \cup \{ (6, 10) \}$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	4	6	3	4	4	6

$$e = (4, 5) \quad i = 4 \quad j = 5 \quad p = 4 \quad q = 5 \quad F = F \cup \{ (4, 5) \}$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	4	4	3	4	4	6

$$e = (9, 10) \quad i = 9 \quad j = 10 \quad p = 4 \quad q = 6 \quad F = F \cup \{ (9, 10) \}$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	4	4	3	4	4	4

$$e = (1, 4) \quad i = 1 \quad j = 4 \quad p = 1 \quad q = 4 \quad F = F \cup \{ (1, 4) \}$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	1	4	4	3	4	4	4

$$e = (3, 4) \quad i = 3 \quad j = 4 \quad p = 3 \quad q = 1 \quad F = F \cup \{ (3, 4) \}$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	1	1	4	4	3	4	4	4

$$e = (5, 9) \quad i = 5 \quad j = 9 \quad p = 1 \quad q = 1 \quad \times \times \times$$

$$e = (5, 6) \quad i = 5 \quad j = 6 \quad p = 1 \quad q = 1 \quad \times \times \times$$

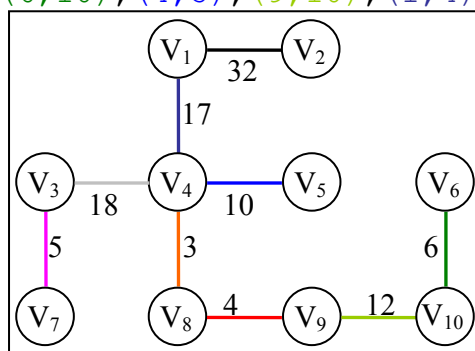
$$e = (1, 2) \quad i = 1 \quad j = 2 \quad p = 1 \quad q = 2 \quad F = F \cup \{ (1, 2) \}$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	4	4	3	4	4	4

$$|F| = 9$$

بنابراین داریم:

$$F = \{ (4, 8), (8, 9), (3, 7), (6, 10), (4, 5), (9, 10), (1, 4), (3, 4), (1, 2) \}$$



۱۱- ردیابی الگوریتم دیکسترا برای گراف تمرین ۲ ($F = \emptyset$):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	32	∞	17	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2	32	0	∞	∞	45	∞	∞	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	18	∞	∞	5	∞	∞	∞
4	17	∞	18	0	10	∞	∞	3	∞	∞
5	∞	45	∞	10	0	28	∞	∞	25	∞
6	∞	∞	∞	∞	28	0	∞	∞	∞	6
7	∞	∞	5	∞	∞	∞	0	59	∞	∞
8	∞	∞	∞	3	∞	∞	59	0	4	∞
9	∞	∞	∞	∞	25	∞	∞	4	0	12
10	∞	∞	∞	∞	∞	6	∞	∞	12	0

i	1	2	3	5	6	7	8	9	10
touch	4	4	4	4	4	4	4	4	4
length	17	∞	18	10	∞	∞	3	∞	∞

min=3 vnear=8

$$F = F \cup \{ (8, 4) \}$$

i	1	2	3	5	6	7	9	10
touch	4	4	4	4	4	8	8	4
length	17	∞	18	10	∞	62	7	∞

min=7 vnear=9

$$F = F \cup \{ (9, 8) \}$$

i	1	2	3	5	6	7	10
touch	4	4	4	4	4	8	9
length	17	∞	18	10	∞	62	19

min=10 vnear=5

$$F = F \cup \{ (5, 4) \}$$

i	1	2	3	6	7	10
touch	4	5	4	5	8	9
length	17	55	18	38	62	19

min=17 vnear=1

$$F = F \cup \{ (1, 4) \}$$

i	2	3	6	7	10
touch	5	4	5	8	9
length	49	18	38	62	19

min=18 vnear=3

$$F = F \cup \{ (3, 4) \}$$

i	2	6	7	10
touch	5	5	3	9
length	49	38	23	19

min=19 vnear=10

$$F = F \cup \{ (10, 9) \}$$

i	2	6	7
touch	5	10	3
length	49	25	23

min=23 vnear=7

$$F = F \cup \{ (7, 3) \}$$

i	2	6
touch	5	10
length	49	25

min=25 vnear=6

F=FU{(6,10)}

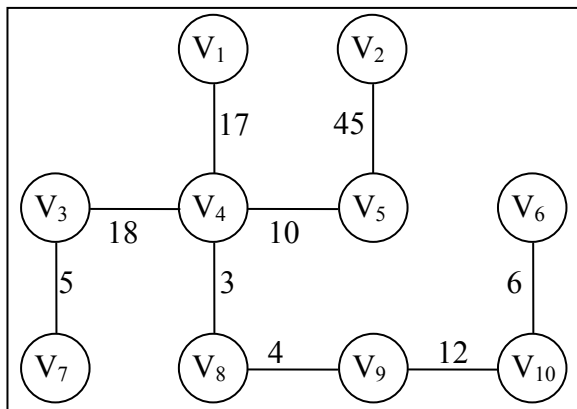
i	2
touch	5
length	49

min=49 vnear=2

F=FU{(2,5)}

بنابراین داریم: $F = \{(8,4), (9,8), (5,4), (1,4), (3,4), (10,9), (7,3), (6,10), (2,5)\}$

i	1	2	3	5	6	7	8	9	10
touch	4	5	4	4	10	3	4	8	9
length	17	49	18	10	25	23	3	7	19



۱۷- ردیابی الگوریتم کمینه سازی زمان کل: با توجه به جدول زیر زمان بندی [2, 4, 1, 3] با زمان 51 کمینه است.

Job	Time
1	7
2	3
3	10
4	5

Non decreasing Order

Job	Time
2	3
4	5
1	7
3	10

$$3 + (3+5) + (3+5+7) + (3+5+7+10) = 3+8+15+25=51$$

۲۰- ردیابی الگوریتم زمان بندی با مهلت معین برای مسئله زیر:

Job	Time	Benefit
1	2	40
2	4	15
3	3	60
4	2	20
5	3	10
6	1	45
7	1	55

Non decreasing Order

Job	Time	Benefit
3	3	60
7	1	55
6	1	45
1	2	40
4	2	20
2	4	15
5	3	10

deadline	3	1	1	2	2	4	3
----------	---	---	---	---	---	---	---

J	3
K	
SeqOfJobs	3

First:

J	3	7	1
K ₁ (i=3)	3	7	6
K ₂ (i=4)	3	7	1
SeqOfJobs	1	2	3

i=3, 4

J	3	7	1	2	
K(i=7)	3	7	1	2	5
SeqOfJobs	1	2	3	4	

i=7

i=2

J	3	7
K	3	7
SeqOfJobs	1	3

i=5, 6

J	3	7	1	2
K ₁ (i=5)	3	7	1	4
K ₂ (i=6)	3	7	1	2
SeqOfJobs	1	2	3	4

بنابراین کار ها باید به ترتیب [3, 7, 1, 2] انجام شوند که در این صورت، 170 سود بدست می آید.