دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده مهندسی برق

آشنایی مقدّماتی با تبدیل ویولت

گردآورنده:

امید صیّادی

دانشجوی دکترای مهندسی برق (بیوالکتریک)،
آزمایشگاه پردازش سیگنال‌های حیاتی و تصاویر پزشکی،
دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شریف
(osayadi@ee.sharif.edu)

اسفند ۱۳۸۷


بسم الله الرحمن الرحیم

مقدمه:

تبدیل ویولت یکی از پرکاربردترین تبدیلات ریاضی در حوزه پردازشی و به‌ویژه پردازش سیگنال و تصویر می‌باشد. با توجه به ماهیت آنالیز چندرزولوشنی، این تبدیل جای خود را در بسیاری از کاربردهای پردازشی باز کرده است و بعضاً به عنوان توانمندترین ابزار رخ می‌نماید. در این نگارش، مبانی ریاضی تبدیل ویولت مرور خواهد شد. بدین ترتیب که در ابتدا تبدیل فوریه توضیح داده شده و سپس با بیان کاستی‌های آن، تبدیل فوریه زمان کوتاه بررسی می‌گردد. در نهایت به تبدیل ویولت خواهیم پرداخت و به روابط ریاضی آن اشاره خواهیم کرد.

با گسترش کاربردهای این تبدیل، نیاز به فراگیری آن و آشنایی با توانایی‌ها و قابلیت‌های آن رخ می‌نماید. در این راستا، تألیفات و مقالات زیادی وجود دارد که می توان به آن‌ها استناد نمود امّا در اکثر قریب به اتفاق این نوشتارها، یا آن‌که تبدیل ویولت با تفاصیل و جزئیات بسیار بیان شده است و مسلماً به عنوان قدم اول برای آشنایی با این زبان برنامه‌نویسی، حجیم و وقت‌گیر به نظر می‌رسد، و یا آن‌که ماهیت این تبدیل در لفافه روابط ریاضی آن به فراموشی سپرده می‌شود. لذا بر آن شدیم تا با درنظر گرفتن نیاز دانشجویان، به ویژه در مقطع کارشناسی، مقدماتی را جهت آشنایی با این تبدیل تدوین کنیم به نحوی که به عنوان یک خودآموز، در پیمودن قدم‌های اولیه برای آشنایی، سپس تسلط بر مفاهیم مقدماتی تبدیل ویولت و نهایتاً به کارگیری آن، راهگشا باشد.

در این نوشتار، با توجه به گستردگی مطالب سعی بر آن شده است که از پرداختن به جزئیات غیرضروری پرهیز شود. لذا در این نسخه، ابتدا پیشینه آنالیز در حوزه فرکانس با تبدیل فوریه بیان می شود و سپس به مفاهیم مقدماتی و ضروری تبدیل ویولت خواهیم پرداخت و در کنار آن، مثال‌هایی بیان خواهیم کرد، به این امید که دانشجویان عزیز بتوانند با فراگیری این نکات، مسیر فراگیری این تبدیل را ساده‌تر بپیمایند. در این راستا، رئوس مطالبی که به آن‌ها خواهیم پرداخت عبارتند از:

- تبدیل فوریه
- تبدیل فوریه زمان-کوتاه
- آنالیز چندرزولوشنه
- تبدیل ویولت یک بعدی (پیوسته و گسسته)
- تبدیل ویولت دوبعدی

تبدیل فوریه

در یک نگاه کلی، هدف از اعمال یک تبدیل ریاضی بر یک سیگنال، بدست آوردن اطلاعات اضافه‌ای است که در سیگنال خام اولیه قابل دسترس نمی‌باشند. در اغلب رویکردهای پردازشی در مهندسی پزشکی، منظور از سیگنال خام اولیه، سیگنال موردنظر در حوزه زمان است. شایان ذکر است که واژه سیگنال به مفهوم عام آن بیان شده است. به عبارت دیگر، از این به بعد، تصویر به منزله یک سیگنال دوبعدی خواهد بود.

همانگونه که عنوان شد، اکثر قریب به اتفاق سیگنال‌های مورد استفاده در عمل، در حوزه زمان هستند. به عبارت دیگر، درایه‌های سیگنال، جدای از آنچه سیگنال مورد بحث اندازه‌گیری می‌کند، تابعیت زمانی خواهد داشت. بدین‌سان به هنگام رسم سیگنال، دامنه مقادیر مختلف سیگنال بر حسب زمان رسم می‌گردند. طبیعتاً این نحوه نمایش، بهترین شکل برای توصیف یک سیگنال نخواهد بود. در بسیاری موارد، اطلاعات سودمند سیگنال در محتوای فرکانسی آن نهفته‌اند که اصطلاحاً به آن، طیف سیگنال گفته می‌شود. به بیان ساده، طیف یک سیگنال نشان‌دهنده فرکانس‌های موجود در آن سیگنال است.

از دیدگاه علمی، اگر یک متغیر ریاضی یا فیزیکی دارای تغییراتی سریع باشد، به آن پرفرکانس (یا فرکانس بالا) گفته می‌شود و در مقابل اگر تغییرات سیگنال ناچیز باشد، اصطلاحاً سیگنال را فرکانس پائین می‌نامند. به بیان صریح‌تر می‌توان گفت که مفهوم فرکانس در حقیقت نشان دهنده نرخ تغییرات متغیر متناظر با آن است. فرکانس را با معیار سیکل بر ثانیه (هرتز) اندازه می‌گیرند. به عنوان مثال، فرکانس برق شهر، ۵۰ هرتز می‌باشد که نشان‌دهنده این است که جریان الکتریسیته در هر ثانیه، ۵۰ بار سیکل سینوسی را طی می‌کند. با توجه به مفهوم فرکانس می‌بایست ابزاری برای سنجش محتوای فرکانسی یک سیگنال داشت. این ابزار همان تبدیل فوریه است که در ادامه به شرح آن می‌پردازیم.

آنالیز در حوزه فرکانس:

در قرن ۱۹ میلادی، یک ریاضی‌دان فرانسوی به نام جوزف فوریه نشان داد که هر تابع متناوب را می‌توان بر حسب مجموع نامتناهی از توابع پایه سینوسی و کسینوسی (و یا تابع نمایی متناوب مختلط) نوشت. سال‌ها بعد از کشف

این خاصیت شگفت‌انگیز توابع متناوب، این ایده تحت عنوان تبدیل فوریه (Fourier Transform) به سایر توابع نیز تعمیم داده شد. پس از این تعمیم بود که تبدیل فوریه به عنوان ابزاری کارآمد در محاسبات کامپیوتری وارد گردید. در سال ۱۹۶۵، یعنی نزدیک به ۱۵۰ سال بعد از آنکه جوزف فوریه ایده خود را مطرح نمود، یک الگوریتم جدید با نام تبدیل فوریه سریع (FFT) جای خود را در محاسبات کامپیوتری باز کرد. تبدیل فوریه، یک سیگنال را به مجموعی از نامتناهی تابع نمایی مختاط افراز می‌کند که هر کدام از آن‌ها دارای فرکانس‌های مختلفی می‌باشند. طبق تعریف، تبدیل فوریه سیگنال پیوسته در زمان $x(t)$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft} dt \qquad (۱)$$

که در آن t زمان و f فرکانس است. رابطه (۱) تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ را نشان می‌دهد. با استفاده از تبدیل فوریه، می‌توان سیگنال زمانی را به صورت یکتا به نحو زیر تعیین نمود که در اصطلاح، عکس تبدیل فوریه سیگنال نامیده می‌شود:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{+j2\pi ft} dt \qquad (۲)$$

با دقت در رابطه (۱) می‌توان دید که سیگنال $x(t)$ در یک جمله نمایی با فرکانس معین f ضرب شده است و سپس بر *تمام زمان‌ها* انتگرال گرفته شده است. باید دقت نمود که جمله نمایی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$e^{j2\pi ft} = \cos(j2\pi ft) + j\sin(j2\pi ft) \qquad (۳)$$

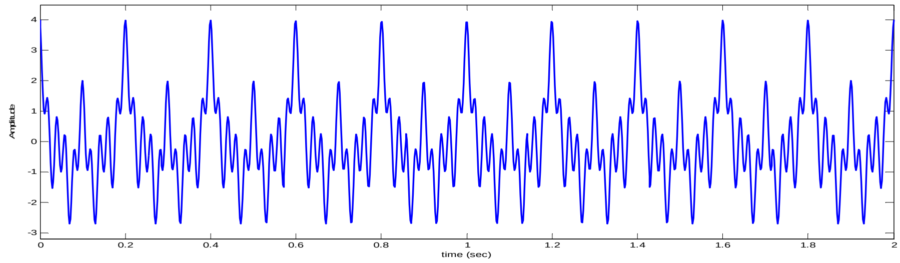
عبارت بالا شامل یک جمله حقیقی کسینوسی با فرکانس f و یک جمله موهومی سینوسی با فرکانس f می‌باشد. بنابراین آنچه در تبدیل فوریه صورت می‌پذیرد در حقیقت ضرب نمودن سیگنال زمانی در یک تابع نمایی مختلط است که در واقع ترکیبی از دو تابع تناوبی با فرکانس f می‌باشد. در گام بعد، از این حاصل‌ضرب انتگرال‌گیری زمانی می‌شود. به بیان بهتر، تمام نقاط این حاصلضرب با یکدیگر جمع می‌شوند. در نهایت اگر حاصل این انتگرال‌گیری (که چیزی جز نوعی جمع نامتناهی نیست) عددی بزرگ باشد، آنگاه می‌گوییم سیگنال $x(t)$ یک مؤلفه فرکانسی برجسته در فرکانس f دارد. اگر حاصل مقداری کوچک باشد، گوئیم مؤلفه فرکانسی f در این سیگنال غالب نیست. صفر بودن حاصل انتگرال نیز به معنای عدم وجود چنین فرکانسی در سیگنال است. برای آن که بررسی دقیق‌تری

نسبت به عملکرد این انتگرال‌گیری داشته باشیم، فرض کنید سیگنال دارای مؤلفه فرکانسی غالب در فرکانس مشخص f باشد. با ضرب این سیگنال در جمله سینوسی با همان فرکانس f ، مؤلفه فرکانسی غالب و جمله سینوسی بر یکدیگر انطباق یافته و لذا مقدار عددی حاصل‌ضرب نسبتاً بزرگ خواهد بود که نشان می‌دهد سیگنال در فرکانس f یک مؤلفه برجسته دارد.

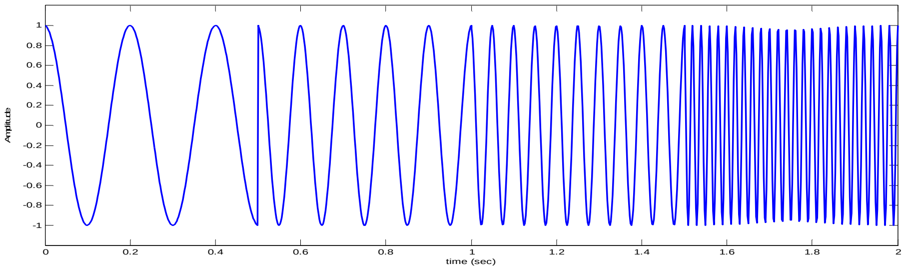
شایان ذکر است، انتگرال تبدیل فوریه بر روی متغیر زمان گرفته می‌شود حال آن‌که سمت چپ این معادله بر حسب فرکانس است. بنابراین، رابطه (۱) باید به ازای کلیه مقادیر f محاسبه گردد. دقت به این نکته که حدود انتگرال رابطه (۱) از $-\infty$ تا $+\infty$ می‌باشد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. چرا که با این تعبیر، هیچ تفاوتی ندارد که فرکانس f در کجای زمان حضور داشته باشد. به بیان دیگر، یک فرکانس غالب، صرف نظر از این‌که در چه زمان‌هایی در سیگنال ظاهر شود، حاصل انتگرال را به یک میزان تحت تأثیر قرار می‌دهد. این نکته، ناکارآمدی تبدیل فوریه را در آنالیز سیگنال‌هایی که فرکانس متغیر دارند نشان می‌دهد. این‌گونه سیگنال‌ها در اصطلاح ناایستا (non-stationary) نامیده می‌شوند.

از بحث بالا می‌توان چنین نتیجه‌گیری نمود که تبدیل فوریه تنها بیان‌کننده این است که فرکانس f در سیگنال موردنظر وجود دارد یا خیر، اما هیچ نوع اطلاعاتی در مورد بازه زمانی متناظر با پدیداری آن فرکانس در اختیار نمی‌گذارد. لذا توجه به ایستا بودن یا نبودن سیگنال، پیش از انجام آنالیز فوریه الزامی است.

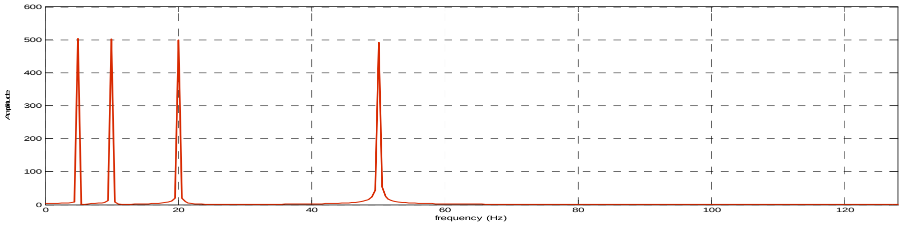
برای آشنایی بیشتر با کارکرد تبدیل فوریه و ضعف آن در مشخص‌سازی موقعیت زمانی فرکانس‌های موجود در سیگنال، مثال زیر را در نظر بگیرید. فرض کنید سیگنال $x_1(t)$ مخلوطی از ۴ تابع کسینوسی با فرکانس‌های ۵، ۱۰، ۲۰ و ۵۰ هرتز باشد که در تمام زمان‌ها حضور دارند. همچنین فرض کنید سیگنال $x_2(t)$ مخلوطی از همان ۴ فرکانس باشد با این تفاوت که هر کدام از فرکانس‌ها فقط در یک بازه زمانی خاص حضور دارند. شکل ۱ این دو سیگنال را به همراه تبدیل فوریه آن‌ها نشان می‌دهد. آنچنانکه دیده می‌شود در هر دو طیف، ۴ قله برجسته متناظر با فرکانس‌های ۵، ۱۰، ۲۰ و ۵۰ هرتز وجود دارد. البته با یک مقایسه بصری می‌توان دید که طیف متناظر با سیگنال الف، فقط دارای ۴ قله برجسته به شکل پیک حول فرکانس متناظر با خود می‌باشد، در حالی که طیف سیگنال ب، علاوه بر ۴ قله برجسته، دارای نوسانات و قله‌های کوچکتر دیگری در سایر فرکانس‌ها نیز می‌باشد.



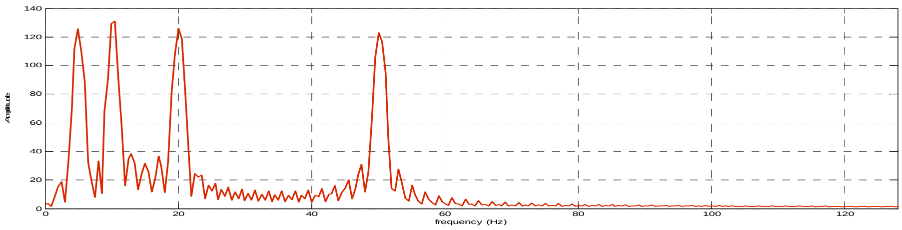
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

شکل ۱- دو نمونه سیگنال شامل مخلوطی از فرکانس‌های ۵، ۱۰، ۲۰ و ۵۰ هرتز و تبدیل فوریه آن‌ها. (الف) مخلوط کسینوسی شامل تمام فرکانس‌ها در تمام زمان‌ها، (ب) مخلوط کسینوسی به نحوی که هر فرکانس فقط در یک بازه زمانی به‌خصوص حضور دارد، (پ) تبدیل فوریه سیگنال الف، (ت) تبدیل فوریه سیگنال ب.

دلیل کم‌دامنه بودن این نوسانات این است که آن‌ها، فرکانس غالب سیگنال نیستند، بلکه در نتیجه تغییرات ناگهانی بین فرکانس‌های مختلف ظاهر شده‌اند. اما در یک نگاه کلی، هر دو طیف نشان‌دهنده وجود ۴ فرکانس غالب در سیگنال می‌باشد اما هیچ‌گونه اطلاعات زمانی (مکانی) در اختیار قرار نمی‌دهد، لذا تبدیل فوریه ابزار مناسبی برای تمایز بین این دو سیگنال نیست. اکنون به دنبال این هستیم که به نوعی اطلاعات زمانی را در کنار مشخصات فرکانسی سیگنال وارد کنیم. اولین تلاش در این زمینه به تبدیل فوریه زمان کوتاه برمی‌گردد.

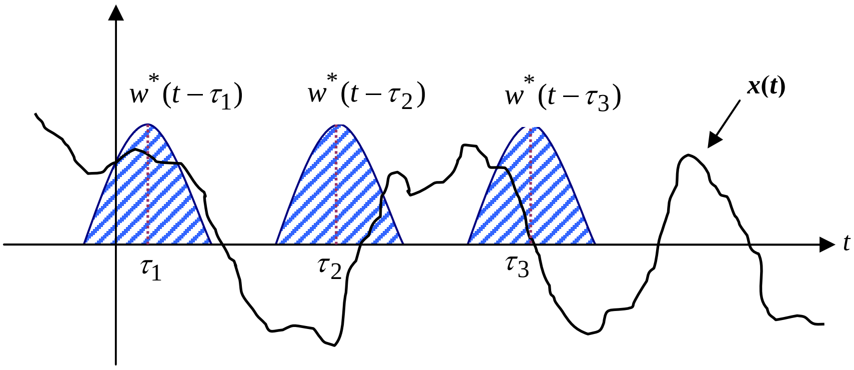
تبدیل فوریه زمان-کوتاه

در بخش پیش دیدیم که تبدیل فوریه در آنالیز سیگنال‌های ناایستا ضعف دارد. ساده‌ترین ایده‌ای که به ذهن می‌رسد این است که می‌توان بخش کوتاهی از یک سیگنال ناایستا را ایستا فرض نمود. این نکته در شکل ۱(ب) نیز به وضوح دیده می‌شود، چرا که به وضوح این سیگنال ناایستا در هر بازه ۰/۵ ثانیه‌ای ایستا است. بنابراین می‌توان با پنجره کردن سیگنال، بخشی از سیگنال که قرار است ایستا فرض شود را استخراج نمود. البته باید دقت داشت که اندازه پنجره به نحوی انتخاب شود که فرض ایستا بودن برای تمام بخش‌های جدا شده توسط آن، برقرار باشد.

با توجه به نکات بالا می‌توان دید که بین تبدیل فوریه و نسخه زمان-کوتاه آن تفاوت چندانی وجود ندارد. تنها تفاوت این است که در تبدیل فوریه زمان-کوتاه (Short Time Fourier Transform)، سیگنال به بخش‌های به حد کافی کوچکی تقسیم می‌شود به نحوی که بتوان این قسمت‌ها را ایستا فرض نمود. بدین منظور از یک تابع پنجره w استفاده می‌شود که طول آن برابر است با حداقل طول مورد نیاز برای آن‌که فرض ایستا بودن قطعات جداشده سیگنال معتبر باشد. بدین ترتیب، تبدیل فوریه زمان-کوتاه سیگنال $x(t)$ با استفاده از پنجره زمانی $w(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$STFT_x^w(\tau, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ w^*(t-\tau)\ e^{-j2\pi ft} dt \qquad (۴)$$

که در آن f متغیر فرکانسی و τ متغیر زمانی است. در حقیقت تبدیل فوریه زمان-کوتاه، همان تبدیل فوریه سیگنال پنجره شده است. در حقیقت با شروع از ابتدای سیگنال، تابع پنجره در سیگنال ضرب شده و سپس تبدیل فوریه این سیگنال پنجره شده محاسبه می‌گردد. در گام بعد، پنجره به میزان τ شیفت می‌یابد و روند قبل مجدداً تکرار می‌شود. بنابراین برای هر مقدار τ و f، تبدیل فوریه زمان-کوتاه محاسبه می‌گردد. نحوه محاسبه تبدیل فوریه زمان-کوتاه و نقش تابع پنجره در شکل ۲ به صورت گرافیکی نشان داده شده است. با دقت در رابطه (۴) درمی‌یابیم که تبدیل فوریه زمان-کوتاه نوعی تبدیل زمان-فرکانس است چرا که خروجی آن دارای دو بعد فرکانس f و جابجایی زمانی τ است. لذا با احتساب دامنه ضرایب تبدیل، می‌توان شکل تبدیل فوریه زمان-کوتاه را به صورت یک نمودار سه‌بعدی ارائه نمود.

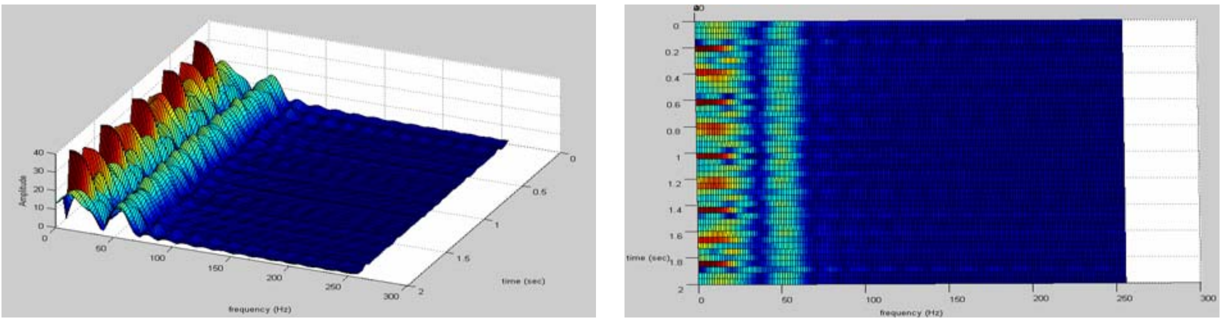


شکل ۲- نمایش گرافیکی نحوه پنجره کردن سیگنال غیرایستا به منظور محاسبه تبدیل فوریه زمان-کوتاه.

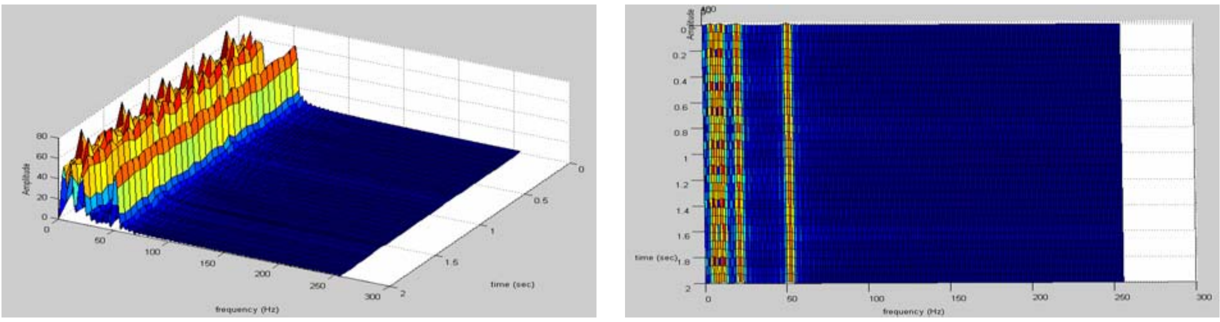
به خاطر داریم که در تبدیل فوریه، در حوزه فرکانس هیچ‌گونه مشکل رزولوشن فرکانسی نداشتیم، چرا که دقیقاً می‌دانستیم چه فرکانس‌هایی در سیگنال موجود می‌باشد (اما از محل زمانی آن‌ها اطلاعی در دست نبود). به طور مشابه، در حوزه زمان، مقدار سیگنال را در هر نمونه زمانی می‌دانستیم و لذا هیچ مشکلی با رزولوشن زمانی نداشتیم. بالعکس، رزولوشن زمانی در حوزه فرکانس و رزولوشن فرکانسی در حوزه زمان در تبدیب فوریه صفر است، چرا که حوزه موردنظر، هیچ‌گونه اطلاعاتی از آن‌ها در اختیار ما قرار نمی‌دهد. از طرف دیگر باید دقت داشت آنچه که سبب می‌شود در حوزه فرکانس بهترین رزولوشن فرکانسی را دارا باشیم، در حقیقت همان هسته نمایی $\exp(-j2\pi ft)$ است که در تمام زمان‌ها، از $-\infty$ تا $+\infty$ حضور دارد. حال آنکه در تبدیل فوریه زمان-کوتاه، طول پنجره مورد استفاده متناهی است که سبب کاهش رزولوشن فرکانسی می‌گردد. بدین‌سان در تبدیل فوریه زمان-کوتاه، دقیقاً نمی‌دانیم چه مؤلفه فرکانسی در سیگنال موجود است بلکه تنها یک محدوده (یک باند فرکانسی) خواهیم داشت. لذا به دلیل محدود بودن طول پنجره، رزولوشن فرکانسی تبدیل فوریه زمان-کوتاه بهترین نخواهد بود. دقت داریم که هرچه طول پنجره مورد استفاده بزرگتر باشد، به سمت تبدیل فوریه پیش می‌رویم. بنابراین با انتخاب پنجره زمانی بزرگ، رزولوشن فرکانسی افزایش می‌یابد. حال آن‌که رزولوشن زمانی یک پنجره بزرگ کم است. در نقطه مقابل، با انتخاب پنجره زمانی کوچک، رزولوشن زمانی خوبی خواهیم داشت اما رزولوشن فرکانسی نامناسب خواهد بود. از آنجا که پنجره به کار رفته در محاسبه تبدیل فوریه زمان-کوتاه ثابت است، لذا بر حسب سیگنال مورد تحلیل، بایستی نوعی مصالحه بین رزولوشن زمانی و فرکانسی قائل شویم، چرا که نمی‌توان همزمان هر دو را خوب کرد.

برای آشنایی بیشتر با نحوه عملکرد تبدیل فوریه زمان-کوتاه، نتایج حاصل از اعمال این تبدیل بر سیگنال‌های الف و ب شکل ۱ با استفاده از دو پنجره با طول‌های کم و زیاد به ترتیب در شکل‌های ۳ و ۴ آورده شده‌اند. آنچنانکه دیده می‌شود در هر دو شکل با افزایش طول پنجره، رزولوشن فرکانسی بهتر می‌شود (باند باریکتر در حوزه فرکانس) و رزولوشن زمانی کاهش می‌یابد. این امر به ویژه در شکل ۴ مشخص و بارزتر می‌باشد. باید دقت داشت که نتیجه حاصل از اعمال تبدیل فوریه زمان-کوتاه بر سیگنال غیرایستا، جدای از اصلاعات فرکانسی، اطلاعات زمانی را نیز به خوبی دربردارد. به عبارت دیگر، با یک نگاه به شکل ۴ می‌توان به سادگی دریافت که هر مؤلفه فرکانسی در چه بازه زمانی حضور دارد. بنابراین با افزودن تابع پنجره به فرمول تبدیل فوریه، به نسخه جدیدی رسیدیم که اطلاعات توأم زمانی و فرکانسی را دربردارد.

تنها مسأله‌ای که باقی می‌ماند، انتخاب اندازه پنجره است. باید دقت داشت که انتخاب پنجره با طول بزرگتر هرچند به افزایش رزولوشن فرکانسی کمک می‌کند، اما فرض ایستا بودن قطعه‌های پنجره شده سیگنال را تحت‌الشعاع قرار می‌دهد. پاسخ این مسأله به کاربرد موردنظر بستگی دارد و غالباً با توجه به سیگنال مورد تحلیل می‌توان طولی از پنجره را انتخاب نمود که در عین حفظ اعتبار فرض ایستایی، رزولوشن زمانی و فرکانسی قابل قبولی داشته باشد. اما با توجه به دشواری این رویکرد و وابستگی آن به سیگنال، ایده استفاده از نوعی تبدیل با رزولوشن قابل تغییر به ذهن رسید که منجر به پیدایش تبدیل ویولت گردید. در ادامه با ایده آنالیز چندرزولوشنه و تبدیل ویولت آشنا خواهیم شد.

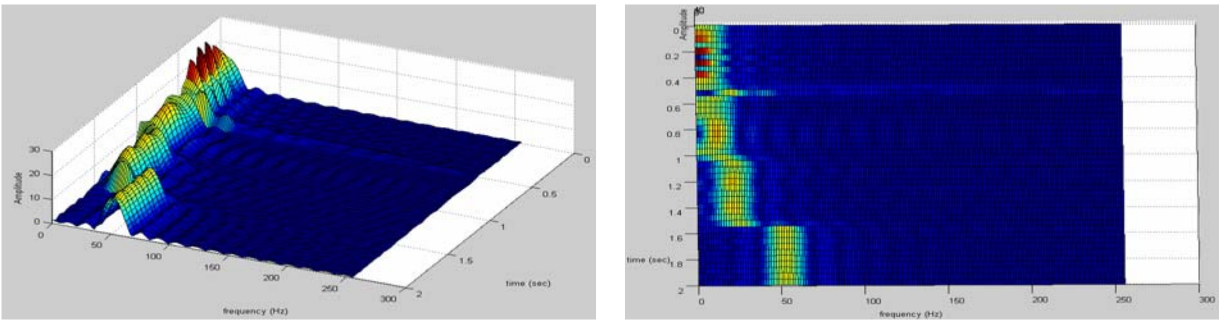


(الف)

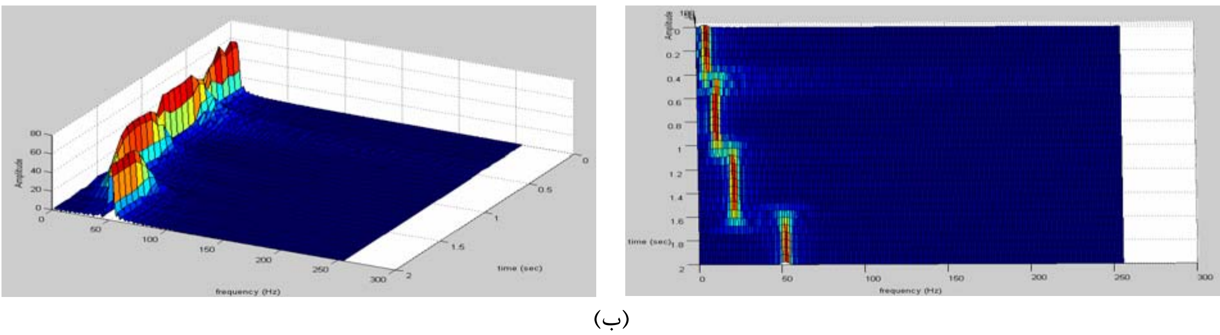


(ب)

شکل ۳- نمایش ۳ بعدی و کانتور برای تبدیل فوریه زمان-کوتاه سیگنال ایستای نشان داده شده در شکل ۱ الف با استفاده از (الف) پنجره ۳۲ نقطه‌ای، (ب) با استفاده از پنجره ۱۲۸ نقطه‌ای.



(الف)



(ب)

شکل ۴- نمایش ۳ بعدی و کانتور برای تبدیل فوریه زمان-کوتاه سیگنال ناایستای نشان داده شده در شکل ۱ ب با استفاده از (الف) پنجره ۳۲ نقطه‌ای، (ب) با استفاده از پنجره ۱۲۸ نقطه‌ای.

آنالیز چندرزولوشنه

مشکل رزولوشن ثابت در تبدیل فوریه زمان-کوتاه ریشه در اصل عدم قطعیت هایزنبرگ دارد. طبق این اصل نمی‌توان توصیف زمان-فرکانس یک سیگنال را به طور دقیق داشت، یعنی نمی‌توان فهمید که در یک سیگنال به طور دقیق چه مؤلفه‌های فرکانسی در چه زمان‌هایی وجود دارد، بلکه تنها می‌توان فهمید که در کدام بازه‌های زمانی، چه باند فرکانسی موجود است. این اصل به طور مستقیم به مفهوم رزولوشن برمی‌گردد. اگرچه مشکلات رزولوشن زمان و فرکانس در نتیجه یک پدیده فیزیکی (اصل عدم قطعیت هایزنبرگ) بوده و ربطی به نوع تبدیل مورد استفاده ندارد، می‌توان از یک رویکرد جایگزین برای تحلیل سیگنال‌ها استفاده نمود که اصطلاحاً آنالیز چندرزولوشنه (Multi-resolution analysis) نامیده می‌شود. در ادامه با این مفهوم بیشتر آشنا شده و نهایتاً از آن به عنوان سنگ بنای تبدیل ویولت بهره خواهیم برد.

منظور از آنالیز چند رزولوشنه، تحلیل سیگنال در فرکانس‌های مختلف با رزولوشن‌های متفاوت است. بدین ترتیب، بر خلاف تبدیل فوریه زمان-کوتاه، در آنالیز چند رزولوشنه، با هر یک از مؤلفه‌های فرکانسی به طور یکسان رفتار نمی‌شود. در حقیقت هدف آنالیز چند رزولوشنه، ارائه رزولوشن زمانی مناسب و رزولوشن فرکانسی نادقیق در فرکانس‌های بالا و در مقابل، رزولوشن فرکانسی خوب و رزولوشن زمانی ضعیف در فرکانس‌های پائین است. این رویکرد به ویژه در کاربردهایی که سیگنال مورد تحلیل دارای مؤلفه‌های فرکانس بالا در مدت زمان کوتاه بوده و مؤلفه‌های فرکانس پائین آن‌ها برای بازه‌های بلند زمانی باقی می‌مانند، مفید می‌باشد. به ویژه این‌که اکثر قریب به اتفاق سیگنال‌هایی که در عمل با آن‌ها مواجه هستیم از این نوع هستند. به عنوان مثال، سیگنال الکتروکاردیوگرام (نوار قلب) را درنظر بگیرید. این سیگنال دارای یک مؤلفه با فرکانس نسبتاً پائین است که در سرتاسر سیگنال وجود دارد (خط پایه و قطعات بین موج‌های مختلف نوار قلب). همچنین این سیگنال دارای مؤلفه‌های فرکانس بالایی است که تنها برای یک دوره زمانی کوتاه و در اواسط هر سیکل از سیگنال ظاهر می‌شوند. این مؤلفه‌ها همان موج‌های *PQRST* می‌باشند. در ادامه، تبدیل ویولت به عنوان ابزاری برای آنالیز چند رزولوشنه معرفی خواهد شد.

تبدیل ویولت یک بعدی

تبدیل ویولت پیوسته:

تبدیل ویولت پیوسته (Continuous Wavelet Transform) به عنوان روشی جایگزین بر تبدیل فوریه زمان-کوتاه ارائه گردید و هدف آن، فائق آمدن بر مشکلات مربوط به رزولوشن در تبدیل فوریه زمان-کوتاه است. در آنالیز ویولت، مشابه با تبدیل فوریه زمان-کوتاه، سیگنال موردنظر در یک تابع (ویولت) ضرب می‌شود که در حقیقت نقش همان تابع پنجره را دارد. همچنین به طور مشابه با قبل، تبدیل ویولت نیز به طور جداگانه بر روی قطعه‌های زمانی مختلف سیگنال انجام می‌شود. اما ماهیتاً دو اختلاف عمده با تبدیل فوریه زمان-کوتاه دارد که عبارتند از:

۱. در تبدیل ویولت، از سیگنال پنجره شده، تبدیل فوریه گرفته نمی‌شود و بنابراین پیک‌های منفرد متناظر با یک سینوسی، یا به عبارت دیگر فرکانس‌های منفی محاسبه نمی‌شود.

۲. در تبدیل ویولت، عرض پنجره به موازات تغییر مؤلفه‌های فرکانسی تغییر می‌کند که به طور حتم مهمترین ویژگی تبدیل ویولت است.

بر این اساس، تبدیل ویولت پیوسته به صورت زیر تعریف می‌گردد:

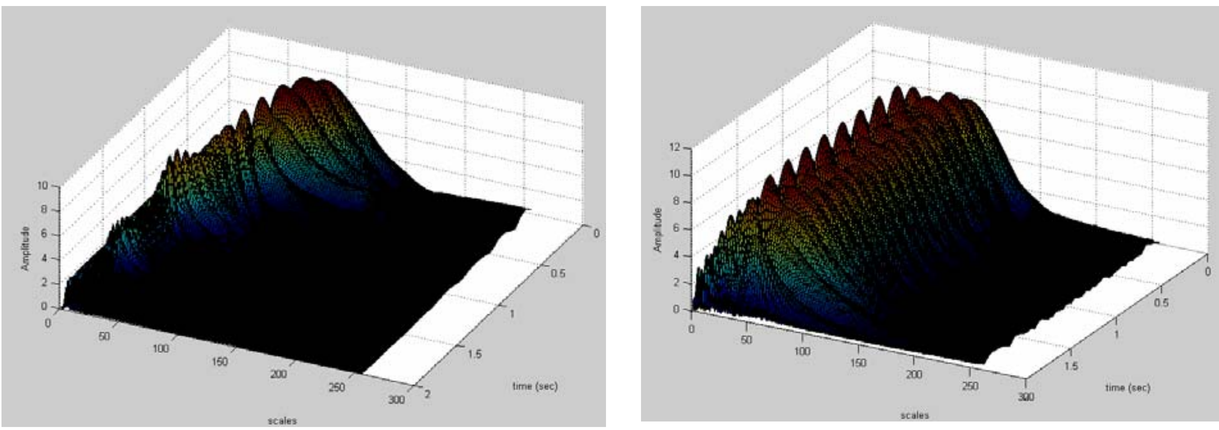
$$CWT_x^{\psi}(\tau,s)=\Psi_x^{\psi}(\tau,s)=\frac{1}{\sqrt{|s|}}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,\psi^*(\frac{t-\tau}{s})\,dt \qquad (۵)$$

که در آن τ و s به ترتیب پارامترهای انتقال (Translation) و مقیاس (Scaling) می‌باشند. مفهوم انتقال دقیقاً مشابه با مفهوم انتقال زمانی در تبدیل فوریه زمان-کوتاه است که میزان جابجایی پنجره را معلوم می‌کند و به وضوح، اطلاعات زمانی تبدیل را دربردارد. اما بر خلاف تبدیل ویولت زمان-کوتاه، در تبدیل ویولت به طور مستقیم پارامتر فرکانس نداریم. در عوض، پارامتر مقیاس را داریم که به طور معکوس با فرکانس ارتباط دارد. به عبارت دیگر $s=1/f$. با مفهوم مقیاس جلوتر آشنا خواهیم شد. در رابطه (۵)، ψ تابع پنجره است که اصطلاحاً ویولت مادر نامیده می‌شود. واژه ویولت به معنای موج کوچک است که در برخی ترجمه‌ها، تعبیر موجک برای آن آورده شده است. دلیل استفاده از واژه کوچک، محدود بودن و کوتاه بودن تابع پنجره می‌باشد. علت استفاده از واژه موج نیز به دلیل ماهیت نوسانی این تابع است. واژه مادر نیز به این منظور به کار برده می‌شود که تمامی نسخه‌های انتقال

یافته و مقیاس شده، همگی از روی یک تابع اولیه بدست می‌آیند که اصطلاحاً ویولت مادر نامیده می‌شود. به بیان علمی، ویولت مادر، یک تابع الگو (proptotype) جهت تولید سایر پنجره‌ها می‌باشد.

آنچنانکه پیش از این عنوان شد، در تبدیل ویولت به جای فرکانس، پارامتر مقیاس وجود دارد. همانگونه که از معنی این پارامتر برمی‌آید، نوعی مفهوم مقیاس درون آن نهفته است. درست به مانند مفهوم مقیاس در نقشه، در تبدیل ویولت نیز مقیاس‌های بزرگ، متناظر با یک دید کلی و فارغ از جزئیات به سیگنال است (متناظر با فرکانس‌های پائین) و مقیاس‌های کوچک، متناظر با نگاه به جزئیات سیگنال است و لذا در تناظر با فرکانس‌های بالا خواهد بود.

مقیاس کردن، به عنوان یک اپراتور ریاضی، سیگنال را منقبض یا منبسط می‌کند. بدین سان، در مقیاس‌های بالا که سیگنال منبسط می‌شود، جزئیات را خواهیم داشت و در مقیاس‌های پائین که سیگنال منقبض می‌شود، کلیات را خواهیم داشت. توجه داریم که متغیر مقیاس در تعریف تبدیل ویولت، در مخرج ظاهر شده است. بنابراین به ازای مقادیر $s>1$ سیگنال منبسط شده و به ازای $s<1$ سیگنال فشرده می‌گردد. شکل ۵ تبدیل ویولت پیوسته سیگنال‌های ایستا و ناایستای نشان داده شده در شکل ۱ را نشان می‌دهد که با استفاده از ویولت مادر db8 محاسبه گردیده‌اند.



(ب) (الف)

شکل ۵- نمایش ۳ بعدی تبدیل ویولت پیوسته سیگنال‌های نشان داده شده در شکل ۱ با استفاده از ویولت مادر db8. (الف) تبدیل ویولت سیگنال ایستا، (ب) تبدیل ویولت سیگنال ناایستا.

می‌توان دید که از لحاظ رزولوشنی، در قیاس با شکل‌های ۳ و ۴، نتایج بهتر شده‌اند. همچنین با مقایسه شکل ۵ (ب) با شکل ۴ دیده می‌شود که جای لوب‌های زمان-فرکانس در نمایش تبدیل ویولت تغییر کرده است. دلیل این موضوع نیز به سادگی مشخص است. از آنجا که در شکل ۴، محور افقی فرکانس می‌باشد، ابتدا مؤلفه‌های فرکانس پائین و سپس مؤلفه‌های فرکانس بالا ظاهر شده‌اند، حال آن‌که در تبدیل ویولت، محور افقی مقیاس است. بنابراین ابتدا مؤلفه‌های مقیاس بالا (متناظر با فرکانس پائین) ظاهر شده‌اند و پس از آن مؤلفه‌های مقیاس پائین (متناظر با فرکانس بالا) پدیدار شده‌اند که بدین‌سان کاملاً توجیه‌پذیر است.

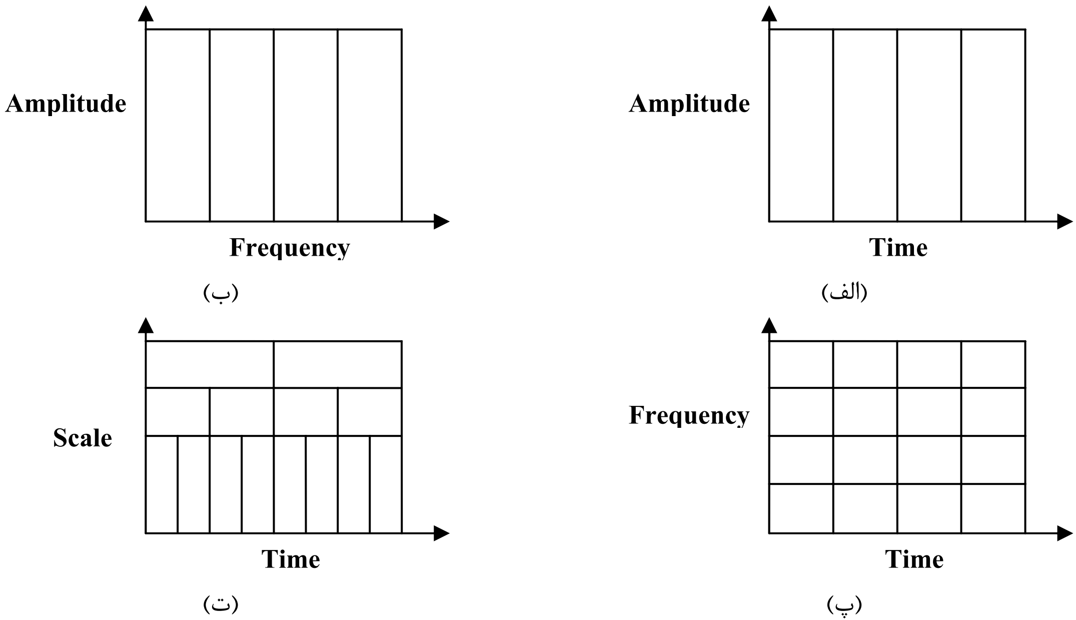
از سوی دیگر، خاصیت آنالیز چند رزولوشنی تبدیل ویولت در شکل بالا به وضوح مشخص است، چرا که در مقیاس‌های پائین (فرکانس‌های بالا) رزولوشن مقیاسی بهتری داریم. به عبارت دیگر در مقیاس‌های پائین، نمودار باریک‌تر است که نشان‌دهنده این است که با دقت بسیار بهتری می‌توان مقدار دقیق مقیاس متناظر را بیان نمود که خود متناظر با رزولوشن فرکانسی ضعیف است. به طور مشابه، مقیاس‌های بالاتر دارای رزولوشن فرکانسی خوب می‌باشند چرا که در طول محور مقیاس، پهن‌تر هستند.

رزولوشن در صفحه زمان فرکانس:

در این بخش، نگاهی دقیق‌تر به خواص مرتبط با رزولوشن در تبدیل ویولت خواهیم انداخت. به خاطر داریم که رزولوشن عامل اصلی روی آوردن از تبدیل فوریه زمان-کوتاه به تبدیل ویولت بود. شکل ۶ توصیف‌های مختلف رزولوشن در صفحات زمان، فرکانس و زمان-فرکانس را برای تبدیل‌های مختلف نشان می‌دهد. هر باکس مستطیلی متناظر با یک مقدار در صفحه مربوطه می‌باشد. توجه داریم که در صفحات زمان-فرکانس، هر باکس یک مساحت غیرصفر دارد که بیان کننده این است که مقدار دقیق یک نقطه در صفحه زمان-فرکانس قابل دانستن نیست. به عبارت دیگر، تمام نقاطی که در صفحه زمان-فرکانس در یک باکس قرار می‌گیرند، توسط یک مقدار تبدیل متناظر (ویولت یا فوریه زمان-کوتاه) توصیف می‌گردند.

شکل ۶ نشان می‌دهد که به واسطه ثابت بودن پنجره در تبدیل فوریه زمان-کوتاه، رزولوشن ایجاد شده در همه جای صفحه زمان-فرکانس ثابت است. حال آن‌که در تبدیل ویولت، طول و عرض باکس‌های مستطیلی که در حقیقت المان‌های رزولوشن می‌باشند، تغییر می‌کند اما همچنان مساحت آن‌ها ثابت می‌ماند. به بیان دیگر، هر

باکس نشان‌دهنده یک بخش یکسان از صفحه زمان-فرکانس است که البته در جاهای مختلف، به زمان و فرکانس سهم متفاوتی اختصاص یافته است. دقت داریم که در مقیاس‌های بالا (فرکانس‌های پائین)، ارتفاع باکس‌ها کوتاه‌تر است که متناظر با رزولوشن فرکانسی بهتر است و عرض باکس‌ها بزرگ‌تر است که بیان کننده رزولوشن زمانی ضعیف می‌باشد. در نقطه مقابل، در مقیاس‌های پائین (فرکانس‌های بالا)، عرض باکس‌ها کاهش یافته تا رزولوشن زمانی بهبود یابد و در عوض ارتفاع آن‌ها افزایش می‌یابد تا در جایی که نیازی به رزولوشن خوب نداریم، رزولوشن بدتر شود. شایان ذکر است که مساحت باکس‌ها به نامساوی هایزنبرگ مربوط می‌شود و بستگی به نوع ویولت مادر به کار رفته دارد. می‌توان نشان داد که فارغ از این‌که ویولت مادر به کاررفته چه باشد، کران پائین مساحت باکس‌ها به عدد $\pi/4$ محدود می‌شود چرا که بر اساس اصل عدم قطعیت هایزنبرگ، نمی‌توان عرض باکس‌ها را تا جای ممکن کم کرد.



شکل ۶- نمایش رزولوشن در صفحات مختلف. (الف) صفحه زمان، (ب) صفحه فرکانس، (پ) صفحه زمان-فرکانس در تبدیل فوریه زمان-کوتاه، (ت) صفحه زمان-فرکانس در تبدیل ویولت.

روابط ریاضی تبدیل ویولت:

در این بخش، ایده اصلی تبدیل ویولت در قالب روابط ریاضی پایه‌ای بیان می‌شود.

یک پایه از فضای برداری V مجموعه‌ای از بردارهای مستقل خطی است به نحوی که بتوان هر بردار v در فضای V را برحسب یک ترکیب خطی از این بردارهای پایه نوشت. در حالت کلی برای هر فضای برداری می‌توان بیش از یک

پایه یافت، اما همگی آن‌ها دارای تعداد یکسانی بردار پایه خواهند بود که این تعداد را بعد آن فضای برداری می‌نامند. بدین‌سان، توصیف هر بردار دلخواه فضا چنین نشان داده می‌شود:

$$v = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k b_k \qquad (۶)$$

که در آن، b_k بردارهای پایه فضا هستند، α_k ضرایب ترکیب خطی بوده و N بعد فضاست. این مفهوم که در فضای برداری بیان شد را می‌توان به سادگی به توابع تعمیم داد با این تغییر که بردارهای پایه جای خود را به توابع پایه (ϕ_k) می‌دهند. بدین سان، هر تابع دلخواه $f(t)$ را می‌توان به صورت زیر توصیف نمود:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \phi_k(t) \qquad (۷)$$

همانگونه که پیش از این دیدیم، توابع نمایی مختلط، توابع پایه برای محاسبه تبدیل فوریه یک سیگنال هستند. به علاوه، این توابع متعامد بوده و لذا این قابلیت را به تبدیل فوریه می‌دهند که بتوان سیگنال اولیه را از روی تبدیل‌یافته بازسازی نمود.

فرض که $f(t)$ و $g(t)$ دو تابع در فضای دوبعدی باشند. ضرب داخلی این دو تابع به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\left\langle f(t), g(t) \right\rangle = \int f(t)\, g^*(t) dt \qquad (۸)$$

بر این اساس، رابطه تبدیل ویولت پیوسته را می‌توان به صورت ضرب داخلی سیگنال و یک تابع پایه به فرم زیر نوشت:

$$\begin{aligned} CWT_x^{\psi}(\tau, s) = \Psi_x^{\psi}(\tau, s) &= \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \psi^*\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt \\ &= \left\langle x(t), \psi_{\tau,s}(t) \right\rangle \end{aligned} \qquad (۹)$$

که در آن:

$$\psi_{\tau,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) \qquad (۱۰)$$

با تعریف ارائه شده در رابطه (۹) که به صورت ضرب داخلی بیان شده است، می‌توان این‌گونه برداشت کرد که تبدیل ویولت در حقیقت اندازه‌گیری شباهت بین سیگنال و توابع پایه (ویولت‌ها) است. منظور از شباهت در این بحث، شباهت‌سنجی بین محتوای فرکانسی است. به بیان دیگر، ضرایب تبدیل ویولت بیانگر میزان نزدیکی سیگنال به ویولت در مقیاس موردنظر است. بدین ترتیب، اگر سیگنال موردنظر یک مؤلفه برجسته در فرکانس متناظر با مقیاس مورد تحلیل داشته باشد، در این صورت ویولت مقیاس شده، شبیه سیگنال موردنظر خواهد بود. بنابراین ضریبی از تبدیل ویولت پیوسته که در این مقیاس محاسبه می‌شود مقداری نسبتاً بزرگ خواهد داشت.

همانگونه که پیش از این بیان شد، در هر فضا بیش از یک مجموعه از توابع پایه وجود دارد که از بین آن‌ها، توابع پایه متعامد از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند چرا که خواص بسیار خوب و تسهیل کننده‌ای به‌ویژه در یافتن ضرایب تبدیل خواهند داشت. بدین‌سان، با استفاده از خاصیت تعامد توابع پایه، ضرایب تبدیل در رابطه (۷) به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\alpha_k = \langle f(t), \phi_k(t) \rangle = \int f(t)\, \phi_k^*(t)\, dt \qquad (۱۱)$$

با داشتن این ضرایب، می‌توان تابع را به صورت زیر بازسازی نمود:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \phi_k(t) = \sum_{k=1}^{N} \langle f(t), \phi_k(t) \rangle \phi_k(t) \qquad (۱۲)$$

در کنار این خواص تسهیل کننده، ممکن است بسته به کاربرد، توابع پایه متعامد در دسترس نباشد. در این مواقع می‌توان از پایه‌های دومتعامد (biorthogonal) استفاده نمود. واژه دومتعامد به دو پایه مختلف که عمود بر یکدیگر هستند اما هرکدام به تنهایی یک پایه متعامد تشکیل نمی‌دهند برمی‌گردد. در حالت کلی اگر پایه‌های دومتعامد نیز موجود نباشد، می‌توان از حالت کلی‌تری تحت عنوان فریم استفاده کرد.

پیش از پایان این بخش، به معرفی دو ویولت مادر مشهور که دارای روابط ریاضی صریح می‌باشند، می‌پردازیم:

۱. ویولت کلاه مکزیکی (Mexican Hat) که مشتق دوم تابع گوسی است:

$$\psi(t) = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}\left(e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} \left(\frac{t^2}{\sigma^2} - 1 \right) \right) \qquad (۱۳)$$

۲. ویولت مورلت (Morlet) که شامل یک جمله گوسی و یک جمله مدولاسیون است:

$$\psi(t)=e^{\frac{jt}{a}}\,.\,e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} \tag{۱۴}$$

عکس تبدیل ویولت:

در این بخش، به طور خلاصه، رابطه معکوس تبدیل ویولت و شرط لازم معکوس‌پذیر بودن این تبدیل را از دیدگاه روابط ریاضی بررسی می‌کنیم. گویا تبدیل ویولت معرفی شده در رابطه (۵) معکوس‌پذیر است هرگاه:

$$\int \psi(t)dt=0 \tag{۱۵}$$

برای برقرار بودن این شرط باید ویولت مادر، تابعی نوسانی باشد. ارضا شدن این شرط در بسیاری توابع به سهولت امکان‌پذیر است، مستقل از این‌که توابع پایه متعامد باشند یا خیر. در این‌صورت، عکس تبدیل ویولت از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$x(t)=\frac{1}{c_\psi^2}\int_s\int_\tau \Psi_x^\psi(\tau,s)\frac{1}{s^2}\psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)\,d\tau\,ds \tag{۱۶}$$

که در آن c_ψ یک مقدار ثابت است و به ویولت مورد استفاده بستگی دارد. برگشت‌پذیر بودن تبدیل و توانایی بازسازی کامل به این ثابت بستگی دارد. عموماً این ثابت را ثابت پذیرش (Admissibility Constant) می‌نامند. بر این اساس، شرط پذیرش (Admissibility Condition) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$c_\psi=\left(2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|}d\xi\right)^{\frac{1}{2}}<\infty \tag{۱۷}$$

که در این رابطه، $\hat{\psi}$ تبدیل فوریه تابع ویولت مادر است.

گسسته‌سازی تبدیل ویولت پیوسته:

با توجه به نقش کامپیوترها در انجام محاسبات امروزی، بایستی در کنار مطرح کردن ایده‌های پردازشی، به نوعی آن‌ها را درخور محاسبه توسط کامپیوتر نیز درآورد. تبدیلاتی که تا اینجا بیان شد، از فوریه گرفته تا تبدیل ویولت، همگی پیوسته هستند و امکان کاربرد عملی در کامپیوتر را ندارند. لذا ضروری است که از نسخه گسسته شده آن‌ها

استفاده کنیم. به مانند تبدیلات فوریه گسسته شده، در گسسته کردن تبدیل ویولت نیز ساده‌ترین روش، نمونه‌برداری از صفحه زمان-فرکانس در نقاط مختلف آن است. به طور مشابه، نمونه‌برداری یکنواخت، ساده‌ترین روش انجام این کار خواهد بود. البته در مورد تبدیل ویولت، با تغییر مقیاس می‌توان نرخ نمونه‌برداری را کاهش داد. بدین ترتیب در مقیاس‌های بالاتر (فرکانس‌های پائین‌تر) می‌توان نرخ نمونه‌برداری را با توجه به نرخ نایکوئیست کاهش داد. بنابراین با فرض این که نرخ نمونه‌برداری در مقیاس s_1، برابر با N_1 باشد، نمونه‌برداری در مقیاس $s_2 > s_1$ با نرخ $N_2 < N_1$ صورت خواهد پذیرفت. رابطه دقیق بین این دو نرخ را می‌توان چنین بیان نمود:

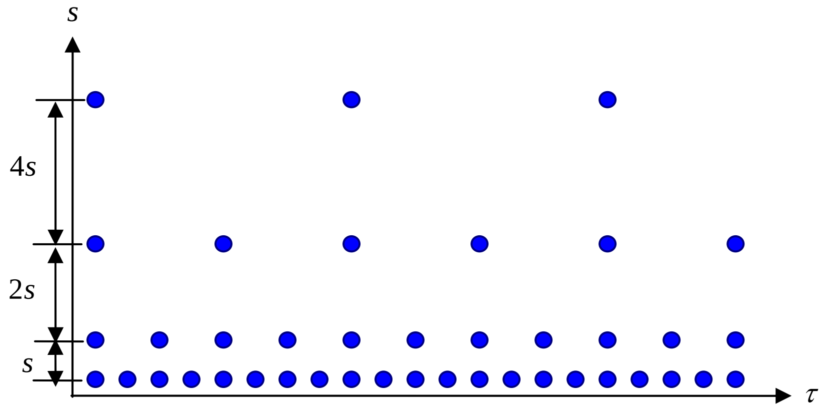
$$N_2 = \frac{s_1}{s_2} N_1 = \frac{f_2}{f_1} N_1 \tag{۱۸}$$

بنابراین می‌توان در فرکانس‌های پائین، نرخ نمونه‌برداری را کاهش داد تا بتوان در زمان محاسبات به میزان قابل توجهی صرفه‌جویی نمود. همچنین اگر بازسازی سیگنال از روی تبدیل آن مدنظر نباشد، می‌توان الزاماً نرخ نایکوئیست را رعایت نکرد. همانگونه که پیش از این نیز بیان شد، تابع ویولت مادر که در شرط پذیرش (۱۷) صدق کند، قادر به بازسازی سیگنال با استفاده از رابطه (۱۶) خواهد بود. البته این خاصیت فقط در تبدیل ویولت پیوسته صادق است. اکنون این سؤال پیش می‌آید که آیا نسخه گسسته‌شده نیز قادر به بازسازی سیگنال می‌باشد یا خیر. پاسخ این سؤال مثبت است، به عبارت بهتر، نسخه گسسته شده تبدیل ویولت نیز تحت شرایطی قادر به بازسازی سیگنال خواهد بود.

به منظور گسسته کردن تبدیل ویولت، ابتدا پارامتر مقیاس s بر حسب یک درجه‌بندی لگاریتمی، گسسته می‌شود. پس از آن، متغیر زمان با توجه به پارامتر مقیاس گسسته می‌شود به نحوی که برای هر مقیاس، یک نرخ نمونه‌برداری جداگانه استفاده شود. اصطلاحاً گفته می‌شود نمونه‌برداری بر روی یک درجه‌بندی دودویی (Dyadic) انجام پذیرفته است. شکل ۷ نحوه گسسته کردن تبدیل ویولت پیوسته را با استفاده از روش بالا نشان می‌دهد. گسسته‌سازی ویولت مادر رابطه (۳-۱۰) چنین است:

$$\psi_{j,k}(t) = s_0^{-j/2} \psi(s_0^{-j} t - k\tau_0) \tag{۱۹}$$

با استفاده از نمایش بالا، نسخه گسسته‌شده تبدیل ویولت به صورت زیر بیان می‌گردد:



شکل ۷- محل ویولت‌ها به هنگام گسسته کردن بر روی درجه بندی دودویی.

$$\Psi_x^{\psi_{j,k}} = \int x(t)\psi_{j,k}^*(t)\,dt \quad (۲۰)$$

به طور مشابه، برای بازسازی سیگنال از روی نسخه گسسته‌شده می‌توان نوشت:

$$x(t) = c_\psi \sum_j \sum_k \Psi_x^{\psi_{j,k}} \psi_{j,k}(t) \quad (۲۱)$$

تبدیل ویولت گسسته:

اگرچه نسخه گسسته شده تبدیل ویولت که در بخش قبل با آن آشنا شدیم، قابلیت محاسبه توسط سیستم‌های کامپیوتری را دارد اما در حقیقت یک تبدیل گسسته نیست. در حقیقت نسخه گسسته شده تبدیل ویولت، یک سری ویولت است که از تبدیل ویولت پیوسته نمونه گرفته است. لذا اطلاعات موجود در آن بسیار زائد و اضافی (Redundant) است که منجر به افزایش بی‌دلیل بار محاسباتی می‌شود. لذا از تبدیل ویولت گسسته استفاده می‌شود که از لحاظ پیاده‌سازی بسیار ساده‌تر و بهینه‌تر است.

اصول تبدیل ویولت گسسته به روشی تحت عنوان کدینگ زیرباند (Subband Coding) برمی‌گردد که در سال ۱۹۷۶ سنگ‌بنای اولیه آن گذارده شد. ایده اصلی این روش نیز مشابه تبدیل ویولت پیوسته است که در آن نوعی توصیف زمان-مقیاس از سیگنال گسسته بااستفاده از فیلترهای دیجیتال ارائه می‌گردد. به خاطر داریم که تبدیل ویولت، جاصل شباهت‌سنجی (کورولیشن) بین محتوای فرکانسی (مقیاسی) سیگنال و تابع ویولت در مقیاس‌های مختلف است. برای محاسبه تبدیل ویولت پیوسته نیز پنجره موردنظر منقبض/ منبسط شده و شیفت می‌یابد و در

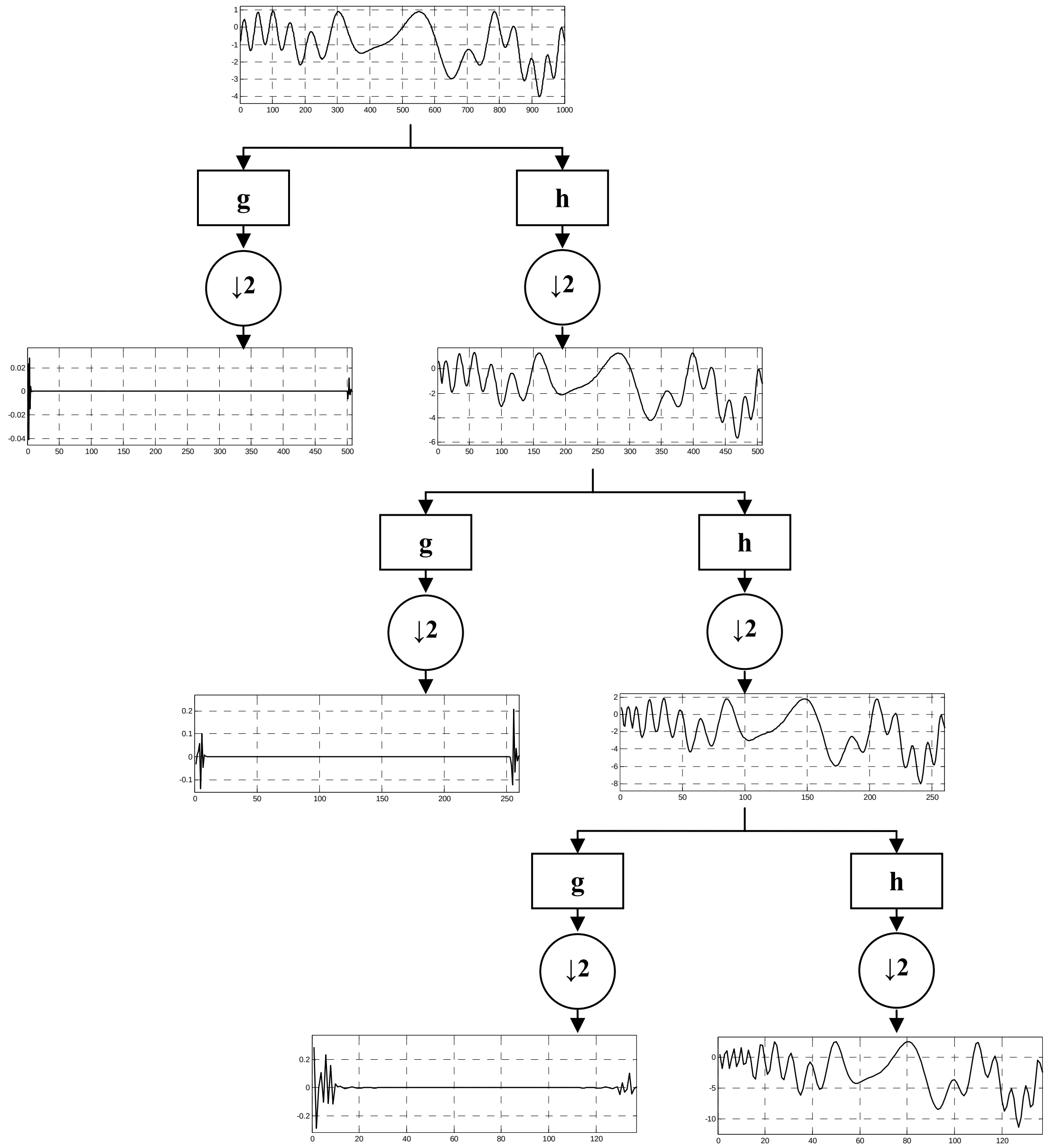
هر موقعیت، از حاصلضرب آن در سیگنال، انتگرال زمانی گرفته می‌شود. در حالت گسسته، فیلترهایی با فرکانس قطع‌های مختلف برای تحلیل سیگنال در مقیاس‌های متفاوت به کار برده می‌شود. با عبور سیگنال از فیلترهای بالاگذر و پائین‌گذر، فرکانس‌های مختلف آن تحلیل می‌شود. در حالت گسسته، رزولوشن سیگنال توسط عملکردهای فیلترها کنترل می‌شود و مقیاس از طریق Downsampling یا Upsampling تغییر می‌کند. به طور معمول، این روند تغییر نرخ نمونه‌ها بر روی یک شبکه Dyadic با $s_0 = 2$ و $\tau_0 = 1$ انجام می‌پذیرد. بنابراین مقیاس‌ها و شیفت‌های زمانی متناظر به ترتیب عبارتند از $s = 2^j$ و $\tau = k2^j$.

روند پردازش با تبدیل ویولت گسسته چنین آغاز می‌شود؛ در ابتدا سیگنال از یک فیلتر دیجیتال پائین‌گذر نیم‌باند با پاسخ ضربه $h[n]$ عبور می‌کند، و لذا خروجی فیلتر برابر است با کانولوشن ورودی و پاسخ ضربه فیلتر. در نتیجه این عمل فیلترینگ، تمام مؤلفه‌های فرکانسی که بیشتر از نصف بزرگترین فرکانس موجود در سیگنال باشند حذف می‌شوند. از آنجا که بیشترین فرکانس موجود در سیگنال خروجی فیلتر برابر است با $\pi/2$ رادیان، نیمی از نمونه‌ها قابل حذف اند. لذا با حذف یکی در میان نمونه‌ها، طول سیگنال نصف خواهد شد بدون این‌که اطلاعاتی را از دست داده باشیم. روند مشابهی نیز با استفاده از یک فیلتر دیجیتال بالاگذر نیم‌باند با پاسخ ضربه $g[n]$ انجام می‌پذیرد. در نتیجه در خروجی اولین مرحله از اعمال تبدیل ویولت، دو نسخه، یکی بالاگذر و دیگری پائین‌گذر، با طول کاهش‌یافته (نصف شده) از سیگنال اولیه به فرم زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} y_{high}[k] &= \sum_n x[n].g[2k-n] \\ y_{low}[k] &= \sum_n x[n].h[2k-n] \end{aligned} \qquad (۲۲)$$

با این عمل، رزولوشن زمانی نصف شده و در مقابل رزولوشن فرکانسی دو برابر می‌شود. این روند را می‌توان مجدداً برروی نسخه پائین‌گذر شده اعمال نمود و در هر مرحله، با کاهش رزولوشن زمانی به میزان نصف مرحله قبل، رزولوشن فرکانسی را دو برابر نمود. این ایده برای محاسبه تبدیل ویولت گسسته، به روش بانک‌فیلتر مشهور است که در شکل ۸ برای یک سیگنال دلخواه و برای ۳ مرحله نشان داده شده است. می‌توان دید که ضرایب خروجی فیلتر پائین‌گذر، شکل اولیه سیگنال را دنبال می‌کنند، به همین دلیل به این ضرایب، تقریب (Approximation) گفته می‌شود. همچنین ضرایب خروجی فیلتر بالاگذر، جزئیات فرکانس بالای سیگنال را دربردارند، به همین دلیل به این ضرایب، جزئیات (Detail) گفته می‌شود. با افزایش تعداد مراحل تبدیل، میزان جزئیات نیز کاهش می‌یابد.

باید دقت داشت که تعداد مراحل مورد نیاز برای تبدیل ویولت گسسته، به خصوصیات فرکانسی سیگنال مورد تحلیل بستگی دارد. نهایتاً تبدیل ویولت گسسته سیگنال از کنار یکدیگر قرار دادن خروجی‌های فیلترها، از مرحله اول اعمال فیلترینگ بدست می‌آید. بدین سان، تعداد ضرایب تبدیل ویولت با تعداد نمونه‌های سیگنال گسسته ورودی برابر خواهد بود.



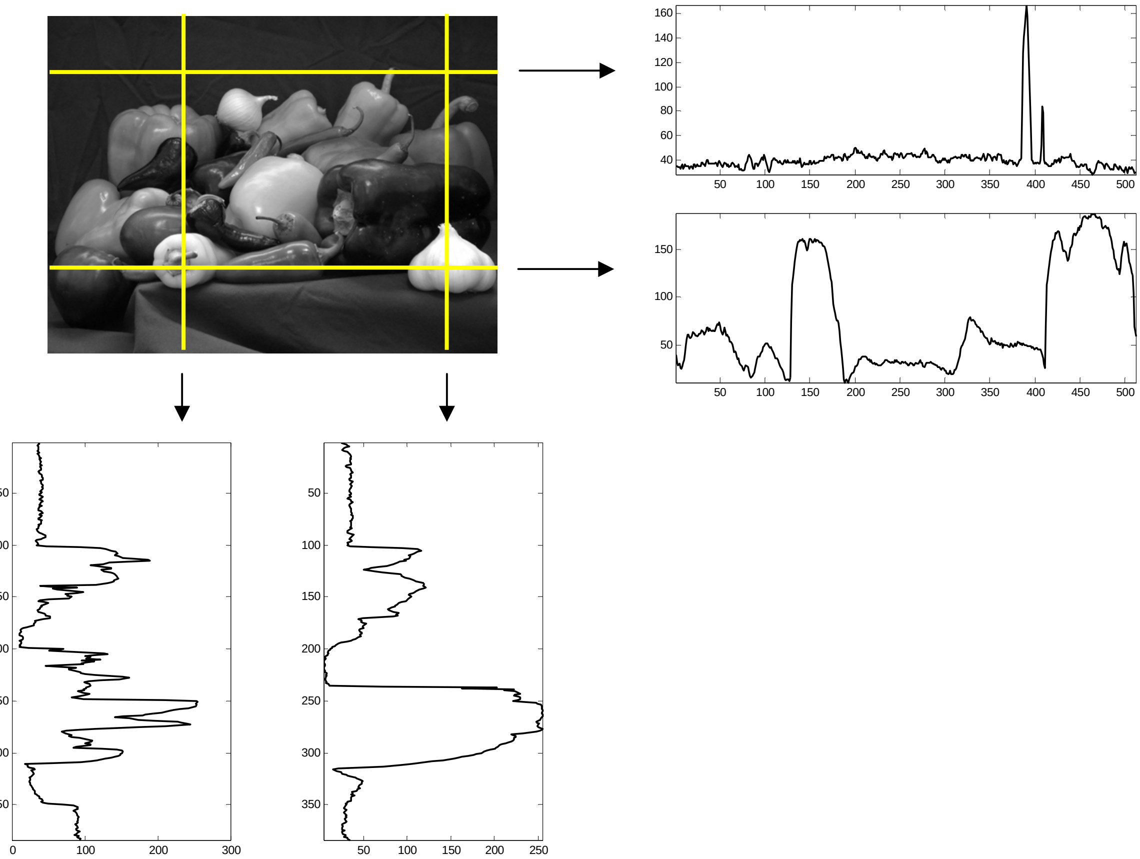
شکل ۸- نمایش نحوه محاسبه تبدیل ویولت گسسته ۳ مرحله‌ای با استفاده از ایده بانک فیلتر برای یک سیگنال دلخواه.

تبدیل ویولت دو بعدی

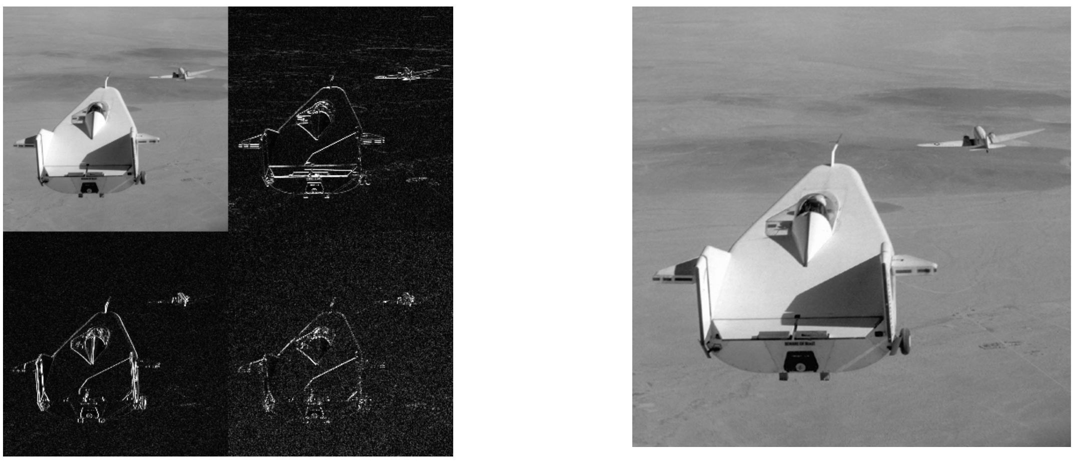
در بخش پیشین با اصول ریاضی تبدیل ویولت یک بعدی آشنا شدیم. به نظور تعمیم ایده تبدیل ویولت یک بعدی به حالت دو بعدی، الگوریتم بسیار سادهای وجود دارد که در ادامه بررسی می گردد.

در هر سیگنال دو بعدی که از آن عموماً به تصویر یاد می‌شود، یک ماتریس از المان‌ها موجود است که در سطر و ستون‌های مختلف چیده شده‌اند. با کمی دقت می‌توان دید که هر ستون یا هر سطر از یک تصویر را می‌توان به عنوان یک سیگنال یک بعدی تصور نمود که مقادیر دامنه آن، میزان روشنایی نقاط (پیکسل‌های) موجود در آن ستون یا سطر خاص را نشان می‌دهد. شکل ۹ چند نمونه سیگنال متناظر با سطر یا ستون‌های مختلف یک تصویر را نشان می‌دهد. با این ایده، می‌توان تبدیل ویولت را بر روی هر سطر و یا ستون از تصویر، به طور جداگانه اعمال کرد. در حقیقت، نحوه پیاده‌سازی تبدیل ویولت دوبعدی نیز به همین صورت است. به عبارت دیگر، به منظور اعمال تبدیل ویولت دوبعدی به تصویر، ابتدا تبدیل ویولت یک بعدی به سطرها اعمال می‌شود و سپس ستون‌ها با نرخ ۲، downsample می‌شوند تا فقط نمونه‌های واقع در محل‌های زوج باقی بمانند. در این حالت، مجدداً تبدیل ویولت یک بعدی بر ستون‌ها اعمال می‌گردد و نهایتاً سطرها با نرخ ۲، downsample می‌شوند. بدین ترتیب، ۴ زیرباند مختلف به عنوان ضرایب تبدیل ویولت تصویر بدست می‌آید.

مشابه با حالت یک بعدی، اولین زیرباند از ضرایب تبدیل ویولت مربوط به ضرایب تقریب است که از لحاظ مقدار و شکل ظاهری، مشابه با تصویر اولیه است. جدای از زیر باند تقریب، ۳ زیر باند جزئیات خواهیم داشت که یکی از آن‌ها مربوط به جزئیات افقی موجود در تصویر، یکی از آن‌ها مربوط به جزئیات عمودی موجود در تصویر و آخرین زیرباند مربوط به سایر جزئیات موجود در تصویر است که گاهاً به آن، جزئیات قطری نیز گفته می‌شود. شکل ۱۰، دو مرحله تبدیل ویولت دو بعدی یک نمونه تصویر را نشان می‌دهد. آنچنانکه دیده می‌شود، در زیرباند تقریب (که بالا، سمت چپ واقع است) شکل اولیه حفظ شده است. همچنین، در زیرباند جزئیات افقی (بالا، سمت راست) بخش‌های دارای رفتار افقی موجود در تصویر به نمایش در می‌آید. مشابهاً، در زیرباند جزئیات عمودی (پائین، سمت چپ) بخش‌های دارای رفتار عمودی موجود در تصویر نمایش داده می‌شود. آخرین زیرباند نیز مربوط به جزئیات است که در پائین، سمت راست قرار دارد.



شکل ۹- سیگنال‌های یک بعدی بدست آمده از چند سطر و ستون دلخواه از یک نمونه سیگنال دوبعدی (تصویر).



(الف) (ب)

شکل ۱۰- (الف) یک نمونه تصویر شامل انواع جزئیات، (ب) یک مرحله تبدیل ویولت تصویر و ۴ زیرباند ایجاد شده.

«والّذین جاهدوا فینا لنهدینّهم سبلنا»

با آرزوی موفقیت

امید صیّادی